





PRINCIPES DE LA CONSTRUCTION

DES

ORGANES DES MACHINES.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX
PIÈCES DES MACHINES — CALCUL DES RÉSISTANCES PASSIVES
CONSTRUCTION DES ENGRENAGES — MÉCANISMES DE MOUVEMENT.

AVEC UN ATLAS DE 45 PLANCHES.

PAR

F. REDTENBACHER,

DIRECTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE CARLSRUHE
ET PROFESSEUR DU COURS DE CONSTRUCTION DE MACHINES A CETTE ÉCOLE.

ÉDITION FRANÇAISE.



HEIDELBERG.
F. BASSERMANN, ÉDITEUR.

PARIS.
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE DE J. BAUDRY, ÉDITEUR.
15 RUE DES SAINTS-PÈRES.
MÊME MAISON A LIÉGE.
1872.

PRINCIPES DE LA CONSTRUCTION

DES

ORGANES DES MACHINES.

PRINCIPES DE LA CONSTRUCTION

DES

ORGANES DES MACHINES.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX
PIÈCES DES MACHINES — CALCUL DES RÉSISTANCES PASSIVES
CONSTRUCTION DES ENGRENAGES — MÉCANISMES DE MOUVEMENT.

AVEC UN ATLAS DE 45 PLANCHES.

PAR

F. REDTENBACHER,
DIRECTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE CARLSRUHE
ET PROFESSEUR DU COURS DE CONSTRUCTION DE MACHINES À CETTE ÉCOLE.

ÉDITION FRANÇAISE.



HEIDELBERG.
F. BASSERMANN, ÉDITEUR.

PARIS.
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE DE J. BAUDRY, ÉDITEUR.
15 RUE DES SAINTS-PÈRES.
MÊME MAISON A LIÉGE.
1872.

Imprimerie de G. Otto à Darmstadt.

Préface de l'Édition française.

L'ouvrage en trois volumes, que Redtenbacher a publié, quelques années seulement avant sa mort, et qui porte le titre de „Der Maschinenbau", est le résumé des leçons qu'il a professées à l'école polytechnique de Carlsruhe.

Dans la pensée du savant professeur, cet ouvrage était destiné à établir, en quelque sorte, un trait d'union entre deux autres traités qu'il avait publiés précédemment et qui renfermaient, l'un les Principes de la mécanique, l'autre les Résultats destinés à la construction des machines; en d'autres termes, pour les étudiants allemands, le traité de construction des machines devait être l'intermédiaire entre l'exposé des principes de la mécanique et l'aide-mémoire du constructeur.

Cette connexion, que l'auteur a cherché à établir entre ses trois ouvrages les plus importants, semble tout d'abord devoir être un obstacle sérieux à la publication séparée du traité de construction. Mais cette difficulté n'est qu'apparente; les principes de mécanique rationnelle sont généralement connus de tous ceux qui se livrent sérieusement à l'étude des méthodes de construction et pour ceux qui, en plus petit nombre, auraient à compléter leur instruction à ce point de vue, ils pourront se reporter, sans le moindre inconvénient,

à l'un des nombreux traités. publiés en France et, en particulier, à l'ouvrage de Poncelet, l'introduction à la mécanique industrielle. Nous nous sommes donc borné à emprunter au premier traité de Redtenbacher, intitulé „Prinzipien der mechanik“ quelques indications qui nous ont paru présenter un assez grand intérêt au point de vue de la construction et que nous avons résumées, sous le titre de Principes généraux, dans la seconde section de cet ouvrage. C'est dans cette partie que se trouve l'exposé de la méthode si féconde des Rapports, dont l'usage est aujourd'hui général en Allemagne et dont Redtenbacher doit être regardé comme le véritable inventeur.

Une autre modification que nous avons introduite a consisté à supprimer les liaisons établies, pour certains calculs, entre le texte allemand du traité que nous publions et l'aide-mémoire intitulé „Resultate für den Maschinenbau“. Bien que cet ouvrage ait été traduit en français et se trouve entre les mains d'un grand nombre de personnes, cette obligation de recourir à un ouvrage étranger, pour compléter les indications dont on peut avoir besoin dans un cas déterminé, nous a paru une chose fâcheuse et nous avons tenu à la faire disparaitre, en intercalant, dans le texte, les tableaux extraits de l'aide-mémoire et en complétant l'atlas par l'addition d'un certain nombre de Planches.

Nous avons supprimé, d'un autre côté, toute une section, qui traitait des divers appareils de mesures et de poids et qui nous a paru devoir trouver beaucoup mieux sa place dans l'un des deux autres volumes, que nous nous proposons de faire paraitre successivement.

Avec ces légères modifications, l'édition française de l'ouvrage de Redtenbacher, formera un traité complet de la construction des machines motrices et des machines-outils.

Le premier volume, que nous publions aujourd'hui, renferme toutes les indications nécessaires pour la construction raisonnée des divers organes des machines. Il se divise en six sections principales, comprenant:
la première, l'élasticité et la résistance des matériaux;
la deuxième, la construction des pièces de machines;
la troisième, le calcul des résistances passives;
la quatrième, la construction des engrenages;
la cinquième, les mécanismes de mouvement;
la sixième, les machines mues par la force de l'homme.

Il nous reste, en terminant, à exprimer le désir que le traité de construction des machines de Redtenbacher soit aussi favorablement accueilli du public français que l'a été l'édition de l'ouvrage du même auteur, qui a paru sous le titre de „Résultats scientifiques et pratiques destinés à la construction des machines".

Table des matières.

Pages.

PREMIÈRE SECTION.

Elasticité et Résistance des matériaux.

*

DEUXIÈME SECTION.

Construction des pièces de machines.

TROISIÈME SECTION.

Calcul des Résistances passives.

QUATRIÈME SECTION.

Des engrenages.

CINQUIÈLE SECTION

Des mécanismes de monvement.

SIXIÈME SECTION.

Machines mues par la force de l'homme.

PREMIÈRE SECTION.

Elasticité et Résistance des matériaux.

Déformations des corps. Dans l'étude d'un projet de machine, les relations géometriques qu'on établit entre les différents organes supposent nécessairement que, sous l'action des forces extérieures, la forme et les dimensions de ces organes resteront invariables ou, du moins, n'éprouveront que des modifications insensibles. Pour réaliser complètement cette hypothèse, dans l'exécution du projet, il faudrait faire usage de matériaux d'une très-grande rigidité, tandis que tous ceux que nous fournit la nature sont au contraire très-facilement déformables et extrèmement élastiques. Le constructeur a donc le plus grand intérêt à connaître les formes et les dimensions qu'il convient de donner aux différents organes, pour réduire à leur minimum les déformations dues à l'action des forces extérieures et s'écarter, par suite, le moins possible, des relations géométriques admises dans l'étude du projet.

Les déformations d'un corps soumis à des forces extérieures, dépendent à la fois de la forme même du corps et du mode d'action des forces. Les déformations les plus simples sont les extensions et les compressions; les glissements relatifs des diverses parties d'un corps, les unes par rapport aux autres, constituent déjà un problème plus complexe. Il en est de même des flexions, qui donnent lieu à la fois à des extensions et à des compressions, ainsi que des torsions, où les glissements dans une même section varient avec la position des points considérés. Enfin, on peut encore avoir à considérer des déforma-

tions dues à la coexistence d'un certain nombre de mouvements différents, comme, par exemple, celles qui se produisent lorsqu'il y a à la fois flexion et torsion.

Lorsque les déformations dépassent une certaine limite, les molécules du corps, en totalité ou en partie, s'éloignent assez des positions qu'elles occupent à l'état naturel pour qu'il y ait rupture. C'est ce qu'on exprime en disant que la limite de résistance de la matière se trouve dépassée.

Pour déterminer les lois de l'élasticité et de la résistance des matériaux, on peut suivre la méthode rationnelle, partir de la théorie moléculaire et appliquer les principes généraux de l'équilibre des forces, ou se contenter d'un procédé mixte, qui consiste à s'appuyer sur des résultats d'expérience et à en tirer des conclusions. Au point de vue scientifique, la première méthode est de beaucoup supérieure à la seconde; mais cette dernière a l'avantage d'être beaucoup plus facile à suivre et de conduire plus directement à des résultats pratiques, qui peuvent rendre d'utiles services, à la condition de les considérer comme de simples approximations, admissibles seulement dans la limite de certaines hypothèses.

La théorie que nous nous proposons d'exposer repose sur les résultats d'expériences relatives à l'extension, la compression et la flexion, effectuées sur des pièces de différentes natures: nous avons donc à étudier tout d'abord ces expériences fondamentales.

Extension des corps prismatiques.

Loi empirique. Lorsqu'une tige, fixée à l'une de ses extrémités, est soumise à l'autre extrémité à l'action d'une force dirigée suivant son axe, elle éprouve un allongement dans le même sens, en même temps que sa section transversale diminue; le premier effet est beaucoup plus sensible que le second, qu'on peut négliger, sans erreur sensible, dans la plupart des applications. Nous nous bornerons donc à l'étude de l'effet d'allongement. Pour trouver la loi de ce phénomène, on peut suivre deux méthodes: la méthode expérimentale consiste à soumettre à des forces successivement croissantes des tiges de dimensions variables et des différents matériaux, à mesurer les allongements et à examiner si la série des résultats obtenus peut se représenter par une formule mathématique. Mais cette méthode est

défectueuse: quand on expérimente avant d'avoir étudié une question, on s'expose à faire beaucoup de travail en pure perte. Il vaut mieux partir d'une hypothèse plausible, acceptable a priori et chercher à la vérifier par une série d'essais. Si cette vérification se produit, le but est atteint; dans le cas contraire, il suffit souvent d'apporter une légère modification au point de départ pour retrouver la concordance que l'on cherche. Cette méthode par induction conduit rarement aux lois naturelles, mais elle fournit, sans difficulté, des règles suffisamment exactes pour les besoins de la pratique. Nous l'adopterons donc ici, et nous formulerons sur l'allongement des tiges une hypothèse que nous soumettrons ensuite au contrôle de l'expérience.

Si l'on réfléchit aux conditions dans lesquelles se produit l'allongement d'une tige, on est porté à admettre comme probable que l'allongement e sera proportionnel à la longueur l de la tige, à la force extérieure P, inversement proportionnel à la section a, enfin qu'il dépendra de la nature même de la matière considérée. Cette hypothèse s'exprime par la formule

$$e = \frac{P\,l}{a\,\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

dans laquelle ε est un coefficient destiné à caractériser la faculté d'allongement de chaque espèce de matière. C'est ce qu'on nomme le module d'élasticité. En admettant que l'équation (1) soit vraie d'une manière absolue et représente une loi naturelle, il est facile de trouver la signification réelle du module d'élasticité ε. En effet, si la loi est vraie, elle s'applique encore quand on fait $e = 1$ et $a = 1$. On a alors $\varepsilon = P$, c'est-à-dire que ε est la force qu'il faudrait exercer sur une tige d'une section égale à 1 centimètre carré pour l'allonger d'une quantité égale à sa longueur primitive.

Si notre loi est vraie, nous devons, en expérimentant sur des tiges de même nature, trouver pour ε une valeur constante, quelles que soient les variations des quantités e P l et a. Cette vérification, faite un très-grand nombre de fois, a démontré que la loi précédente n'était pas rigoureusement exacte, mais qu'elle pouvait être admise comme approximation, tant que les allongements ne dépassent pas une certaine limite, encore mal déterminée. On trouve, en effet, pour ε des valeurs constantes, pour une même matière, tant que les allongements sont faibles. L'hypothèse cesse de concorder avec les résultats de l'expérience, lors-

que la force appliquée à la tige atteint à peu près le tiers de celle qui détermine la rupture. Pour les forces supérieures à cette limite, les valeurs de ε décroissent successivement suivant une loi encore indéterminée. Comme, dans les problèmes que nous aurons à traiter, les allongements faibles sont les seuls qui interviennent, nous pouvous prendre l'équation (1) et, par suite, la loi qu'elle exprime, comme base de nos recherches ultérieures.

Il est clair que le module d'élasticité change, non seulement pour chaque variété de matière, mais encore pour chaque corps en particulier. Les expériences rigoureuses de Wertheim ont d'ailleurs démontré que, même pour des substances identiques, ce module dépend, non seulement du degré d'allongement, mais encore de la température et surtout de l'état physique à l'intérieur du corps.

Pour les questions ordinaires de la pratique, on n'a pas à tenir compte de ces faibles causes de variation. Cependant, lorsqu'il s'agit de grandes constructions, où l'élasticité des matériaux joue un rôle important, il convient de déterminer, par des expériences directes, les modules d'élasticité des matières qu'on se propose d'employer. Dans la plupart des constructions et des projets de machines, il suffit de prendre pour base des calculs la valeur moyenne du coefficient d'élasticité pour chacun des corps mis en oeuvre. Le tableau placé à la fin de la première section donne, dans la colonne ε, les valeurs moyennes de ce coefficient pour les corps dont l'emploi est le plus fréquent. (Ce tableau a été établi, en prenant pour unités le kilogramme et le centimètre.) Pour le fer forgé, le coefficient ε varie de 1.500.000 à 2.500.000, pour l'acier de 2.000.000 à 2.400.000. Si l'on réfléchit aux nombreux traitements mécaniques, physiques et chimiques, auxquels sont soumis le fer et l'acier, avant d'entrer dans nos constructions, on ne peut que s'étonner de la différence assez faible que présentent ces limites.

Du reste, il est extrêmement difficile d'arriver expérimentalement à des conclusions certaines sur la constitution moléculaire des corps, et la preuve s'en trouve dans les différences des chiffres obtenus pour les limites d'élasticité par des observateurs également dignes de foi.

Plusieurs ont cru pouvoir affirmer, d'après leurs expériences, que, si la traction exercée sur une tige ne dépasse pas une certaine limite, la tige, après la suppression de la charge, revient exactement à sa longueur primitive sans que sa constitution in-

terieure ait éprouvé aucun changement. Cette limite a reçu le nom de **limite d'élasticité**. Cependant, les nombreuses expériences exécutées à ce sujet, avec la plus grande précision, par Wertheim, ont conduit à admettre que cette limite d'élasticité n'existe en réalité pour aucun corps et qu'une tige, quelque faible qu'ait été son allongement, ne revient jamais d'une manière complète à sa longueur primitive, lorsque la force qui agissait sur elle se trouve supprimée. Quoiqu'il en soit, et tout en admettant l'exactitude théorique de ce dernier fait, on n'a point à s'en préoccuper dans les questions pratiques, car les résultats de tous les observateurs sont d'accord pour montrer que ces allongements permanents ne deviennent réellement sensibles que lorsque la force de traction atteint, pour les fers, environ la moitié, et pour les bois, le quart des valeurs qui déterminent la rupture. Dès-lors, on peut admettre que les matériaux de construction n'éprouvent en réalité aucun changement important dans leur constitution moléculaire, tant qu'on a soin de n'exercer sur eux que des efforts inférieurs à ces limites pratiques d'élasticité.

Pour un assez grand nombre de constructions, il importe également de savoir si la durée de l'action des forces influe sur la grandeur de l'allongement. Les essais entrepris à ce point de vue permettent de se prononcer affirmativement. L'allongement augmente en réalité avec le temps pendant lequel agit la force, mais très-lentement. Cette augmentation, d'ailleurs, n'est pas proportionelle au temps; elle parait plutôt tendre vers une limite déterminée.

La formule de l'allongement (1), peut se mettre sous une autre forme. $\frac{P}{a}$ est la force qui s'exerce sur chaque centimètre carré de section de la tige. Ce quotient représente ce qu'on peut appeler l'intensité de la tension et nous le désignerons par J. Le rapport $\frac{e}{l}$ exprime l'allongement de chaque centimètre de la longueur de la tige, ou l'allongement relatif, i. Dans ces conditions, l'équation (1) se trouve remplacée par la suivante:

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{J}{\varepsilon} \\ \text{ou } J &= \varepsilon i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

On obtient donc l'allongement relatif, en divisant l'intensité de la tension par le module d'élasticité, et de même, on obtient la tension, en multipliant l'allongement relatif par le coefficient

d'élasticité. Ces deux règles sont exactes, quelles que soient la longueur et la section des tiges.

Résistance absolue ou Résistance contre la rupture à l'extension.

L'intensité des forces de cohésion d'un corps se trouve déterminée, lorsqu'on connait l'effort nécessaire pour produire la rupture d'un prisme d'un centimètre carré de section, formé de la même matière. Cet effort donne également la mesure de la résistance absolue de cette matière.

L'expérience, en effet, a démontré que la force nécessaire pour rompre une tige est indépendante de la longueur de cette tige et de la forme de sa section, et qu'elle est proportionnelle à cette section.

Si donc on désigne par A la résistance absolue de la matière d'un prisme, par K la force capable de produire la rupture de ce prisme d'une section a (en centimètres carrés), on a, d'après ce qui précède, la relation

$$K = A a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Il est bien évident d'ailleurs que la valeur de A est variable avec la nature du corps. Dans le tableau placé à la fin de la première section, la colonne intitulée A donne les valeurs moyennes de la résistance absolue pour les matériaux les plus employés dans les constructions. Dans la plupart des cas de la pratique, la connaissance de ces valeurs moyennes est parfaitement suffisante; toutefois, lorsqu'on a à établir des constructions où il doit entrer de grandes masses de fer, il est préférable de recourir à des expériences directes et précises pour déterminer le coefficient applicable à la nature des fers qu'on se propose d'employer.

La résistance absolue des métaux est en général très-considérable; elle varie d'ailleurs, dans une certaine mesure, avec la nature des procédés mécaniques ou chimiques suivis pour leur préparation.

Pour un métal déterminé, elle est d'autant plus grande que ce métal a été plus complètement debarrassé des matières étrangères, principalement des scories, et que sa densité a été davantage accrue par le martelage ou la pression. C'est ce qui explique pourquoi le fer en barres minces est, en général, plus résistant

que le fer en grosses barres; c'est aussi pour cette raison que, lorsqu'on veut obtenir du fer en barres de qualité supérieure, il convient de prendre des barres d'une faible section et de les souder en les martelant. La résistance absolue de la fonte (1000) étant prise comme terme de comparaison et représentée par l'unité, celle du bronze est de 2,6, celle du fer 3,3 à 7 (fil de fer), celle de l'acier de 7.5 à 10.

La manière dont les tiges de différents matériaux se comportent à la rupture exprime très-clairement la nature de leur structure moléculaire.

Les bois à fibres courtes (Chêne, Buis), jusqu'au moment de la rupture, n'accusent pas d'autre modification que l'allongement. Une fois la rupture produite, les surfaces de séparation présentent des dentelures d'une faible longueur (Fig. 1, Pl. I).

Pour les bois à fibres allongées, (Sapin, Mélèze etc.), on ne constate d'abord qu'un simple allongement, mais, lorsqu'on se rapproche de la limite de rupture, on entend les craquements dus à la rupture de quelques fibres; à mesure que la tension augmente, ces craquements deviennent de plus en plus fréquents, et lorsqu'enfin la rupture est complète, les surfaces de séparation présentent des dentelures très prononcées (Fig. 2, Pl. I).

La fonte et, d'une manière générale, tous les métaux obtenus par fusion, n'accusent, pendant l'allongement et jusqu'à la rupture, aucun caractère spécial, en dehors de l'allongement lui-même. La rupture se produit subitement, sans être annoncée par aucun indice et les surfaces de séparation présentent la texture plus ou moins cristalline ou grenue.

Il en est tout autrement du fer forgé et, en général, des métaux tenaces et ductiles, comme, par exemple, le cuivre. Si on prend une tige formée de l'un de ces métaux et qu'on l'étire jusqu'à la rupture, à partir du moment où la tension dépasse une certaine limite, il se produit, en un point de la tige, un rétrécissement de la section, (Fig. 3). Ce rétrécissement augmente de plus en plus, sans qu'on constate de changements notables dans les autres parties de la tige, jusqu'au moment où, la section se trouvant suffisamment réduite, il se produit une rupture brusque. Les surfaces de séparation (Fig. 4) indiquent une texture fibreuse, et le fer, en particulier, devient fortement magnétique.

L'acier fondu se comporte à la rupture comme la fonte; l'acier de cémentation comme le fer forgé, mais sans présenter le même degré de ductilité que ce dernier métal.

Dans ces dernières années, on a prétendu que la résistance du fer diminuait, lorsqu'on le soumettait à des chocs ou à des vibrations répétées. On a cherché à vérifier ce fait par un grand nombre d'expériences; mais il parait encore très discutable, car la méthode suivie pour ces expériences peut fort bien conduire à des conclusions erronnées.

Si on considère la question à un point de vue purement théorique, en partant des hypothèses admises sur la constitution moléculaire des corps, on est amené à regarder comme possible et même comme vraisemblable cette diminution dans la résistance. On conçoit, en effet, que des ébranlements répétés et suffisamment énergiques puissent déterminer un changement dans le groupement moléculaire, faire passer le corps de l'état amorphe à un état cristallin régulier, par exemple le fer de l'état ductile à l'état rouverin. Quoiqu'il en soit, ce n'est là qu'une hypothèse possible et tout au plus vraisemblable; la certitude ne pourrait découler que d'une série d'expériences nombreuses, exécutées avec une très-grande précision.

Compression des Prismes de faible longueur.

Les expériences sur la compression des prismes de faible longueur ont démontré que la loi, énoncée page 3, pour l'extension, s'appliquait également à la compression, tant que celle-ci ne dépasse pas une certaine limite, et que, jusqu'à cette limite, le coefficient d'élasticité avait la même valeur que pour l'extension. La résistance des corps à de faibles compressions s'effectue donc dans les mêmes conditions que leur résistance à de faibles allongements, ce qui permet d'établir également dans ce cas les équations:

$$\frac{e}{l} = \frac{P}{a} \frac{1}{\varepsilon}, \qquad i = \frac{J}{\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Toutefois, quand la compression dépasse une certaine limite, le module d'élasticité varie, et suivant une loi généralement différente de celle qui correspond aux allongements considérables. Du reste, les divers matériaux ne se comportent pas à ce point de vue de la même manière. Ainsi, par exemple, pour le fer forgé et les différentes espèces de bois, le module d'élasticité suit la même loi, ou à très-peu près, pour la compression et pour l'extension. Au contraire, pour la fonte, les lois sont très-différentes. En réalité, pour des déformations considérables, la fonte résiste beaucoup mieux à la compression qu'à l'extension.

Résistance absolue des matériaux contre la rupture par compression.

La résistance absolue des matériaux contre la rupture par compression se mesure par l'effort en kilogrammes nécessaire pour écraser un cube d'un centimètre de côté. Cette résistance absolue est, pour le bois, la moitié, pour le fer les quatre cinquièmes de leur résistance absolue contre la rupture à l'extension. Au contraire, pour la fonte, la résistance à la compression est cinq fois et demie plus considérable que la résistance à l'extension.

Résumé des expériences sur l'élasticité et la résistance des matériaux.

Tout ce que nous savons sur la résistance et l'élasticité des matériaux peut se représenter graphiquement ou se résumer dans un tableau des valeurs trouvées par expérience pour les différents corps. Celui que nous donnons ici est emprunté à l'excellent ouvrage de Rebhann sur les constructions en fer et en bois.

Résultats d'expérience sur l'élasticité et la résistance des matériaux.

	A	R	A_1	R_1	ε	α_1	β_1
Fer forgé	4040	$\frac{4}{5}$ A	0·4 A	0·4 A	2,020,000	$\frac{1}{1250}$	$\frac{1}{1250}$
Tôle	3636	$\frac{4}{5}$ A	$\frac{1}{3}$ A	$\frac{1}{3}$ A	1,779,600	$\frac{1}{1222}$	$\frac{1}{1222}$
Fil de fer	6464	$\frac{4}{5}$ A	0·4 A	0·4 A	2,181,600	$\frac{1}{843}$	$\frac{1}{843}$
Fonte	1454	5·5 A	$\frac{4}{9}$ A	$\frac{4}{3}$ A	1,010,000	$\frac{1}{1562}$	$\frac{1}{521}$
Sapin	970	$\frac{1}{2}$ A	$\frac{1}{4}$ A	$\frac{1}{5}$ A	129,280	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{666}$
Pin	808	$\frac{1}{2}$ A	$\frac{1}{4}$ A	$\frac{1}{5}$ A	121,200	$\frac{1}{536}$	$\frac{1}{714}$
Pin sauvage	1050	$\frac{1}{2}$ A	$\frac{1}{4}$ A	$\frac{1}{5}$ A	129,280	$\frac{1}{444}$	$\frac{1}{592}$
Mélèze	1131	$\frac{1}{2}$ A	$\frac{1}{4}$ A	$\frac{1}{5}$ A	129,280	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{533}$
Chêne	808	$\frac{2}{3}$ A	$\frac{1}{3}$ A	$\frac{1}{4}$ A	121,200	$\frac{1}{469}$	$\frac{1}{563}$

Dans ce tableau,

A désigne la résistance absolue contre la rupture par extension,

R la résistance absolue contre la rupture par compression.

A_1 l'intensité de la tension correspondant à la limite d'élasticité pour l'extension,

$\alpha_1 = \frac{e}{l}$ l'allongement relatif correspondant à cette limite d'élasticité,

R_1 l'intensité de la pression correspondant à la limite d'élasticité pour la compression,

β_1 le raccourcissement relatif pour cette même limite,

ε le module d'élasticité de la matière pour les efforts inférieurs à ceux qui correspondent aux limites d'élasticité.

Les valeurs de R, A_1, R_1, sont exprimées en fonction de A.

Dans la Fig. 5, Pl. I, on a pris comme abscisses les charges et comme ordonnées les allongements et raccourcissements relatifs. L'échelle des ordonnées est différente de celle des abscisses, et, dans le tracé des courbes, on ne s'est pas astreint rigoureusement à passer par tous les points donnés par les expériences.

Toutes les courbes partent naturellement de l'origine des coordonnées et forment d'abord sensiblement des portions de lignes droites, puisque, d'après les expériences, pour de faibles intensités de la charge et jusqu'à une certaine limite, les variations de longueur sont à peu près proportionnelles à ces intensités. Dans le voisinage de la limite d'élasticité, chacune de ces courbes s'infléchit rapidement et devient asymptotique à une parallèle à l'axe des ordonnées.

Pour le fer forgé,

$OS = A$ est la résistance absolue; $OS_1 = A_1$ l'intensité de la charge correspondant à la limite d'élasticité; $S_1 s_1 = a$ l'allongement relatif pour cette même limite. On a $OS_1 = 0{\cdot}4 \times OS$ ou $A_1 = 0{\cdot}4 \times A$. OS_3 est la résistance absolue à la compression; OS_2 l'intensité de la pression correspondant à la limite d'élasticité; $S_2 s_2$ le raccourcissement relatif pour cette même limite, et on a $OS_2 = 0{\cdot}4 \times A$. Les indications suivantes permettront d'ailleurs de comprendre plus aisément les notations de la figure:

	bois.	fer.	fonte.
Résistance absolue à l'extension . . .	OH	OS	OG
Tension à la limite d'élasticité pour l'extension	OH_1	OS_1	OG_1
Allongement relatif pour cette limite . .	$H_1 h_1$	$S_1 s_1$	$G_1 g_1$

	bois.	fer.	fonte.
Résistance absolue à la compression . .	$O\,H_3$	$O\,S_3$	$O\,G_3$
Pression à la limite d'élasticité pour la compression	$O\,H_2$	$O\,S_2$	$O\,G_2$
Raccourcissement relatif pour cette limite	$H_2\,h_2$	$S_2\,s_2$	$G_2\,g_2$

Formule empirique pour l'extension et la compression d'un prisme.

Les courbes de la fig. 5 ont, comme nous venons de le voir, pour abscisses les tensions et les pressions, pour ordonnées les allongements ou raccourcissements relatifs correspondants. Ces courbes peuvent être représentées approximativement par des équations.

Considérons un point quelconque m d'une de ces courbes dont les coordonnées soient $O\,p = x$, $m\,p = y$ (fig. 6, pl. 1). Menons la tangente t m n en ce point; elle formera avec O x un angle $t\,n\,x = \varphi$ déterminé par la relation

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{d\,y}{d\,x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Dans le voisinage du point O, le coefficient d'élasticité est constant et exprimé par $\frac{x}{y}$ ou $\frac{d\,x}{d\,y}$. Ce coefficient, au dessus comme au dessous de la limite d'élasticité, peut d'ailleurs toujours être représenté par $\frac{d\,x}{d\,y} = \operatorname{Cotg} \varphi$ et il s'agit simplement de trouver une fonction de x qui donne, exactement ou approximativement, la valeur de $\frac{d\,x}{d\,y}$.

Soit ε le coefficient constant d'élasticité pour des allongements ou des raccourcissements très-faibles; soit $O\,k = a$ la résistance absolue à l'extension, $O\,h = a_1$ la résistance à la compression pour la matière considérée. La fonction de x qu'on cherche pour exprimer $\frac{d\,x}{d\,y}$ doit être telle qu'on ait:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pour } x = o & & \frac{d\,x}{d\,y} = \varepsilon \\ \text{,,} \quad x = a & & \frac{d\,x}{d\,y} = o \\ \text{,,} \quad x = -a_1 & & \frac{d\,x}{d\,y} = o \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Ces conditions seront remplies si l'on pose

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \frac{\varepsilon}{a\,a_1}(a - x)\,(a_1 + x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

En intégrant cette équation différentielle et en remarquant que, pour $x = o$, $y = o$, on trouve:

$$y = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{a\,a_1}{a + a_1}\ \text{log. nat.}\left(\frac{a_1 + x}{a - x}\ \frac{a}{a_1}\right) \ldots\ldots \quad (4)$$

Cette équation est celle d'une courbe que coïncide avec la vraie courbe pour $x = o$, $x = a$, $x = -a_1$. Quant à savoir si, pour les points intermédiaires entre o et a et o et $- a_1$, la coïncidence subsiste, on ne pourrait y arriver qu'en ayant recours à des résultats d'expérience.

Les conditions (2) sont également satisfaites, si l'on pose, au lieu de l'équation (3),

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \frac{\varepsilon}{a^m\,a_1{}^n}\ (a - x)^m (a_1 + x)^n \ \ldots\ldots \quad (5)$$

où m et n sont des nombres qu'on peut se proposer de déterminer de telle sorte que l'équation représente la loi réelle des variations du coefficient d'élasticité.

Cisaillement.

Considérons une section plane A d'une tige et imaginons, appliquées aux deux portions B et C de la tige situées de chaque côté de cette section, des forces, qui agissent parallèlement au plan de la section A, mais suivant deux directions opposées. Sous l'action de ces forces, la tige se trouvera soumise à un effort qu'on désigne sous le nom d'effort de glissement ou de cisaillement. Si la section n'est pas trop grande, on peut supposer que la force nécessaire pour déterminer la rupture dans ces conditions, est proportionelle à la section elle-même, et c'est ce que confirment à très peu près de nombreuses expériences. On a constaté en outre que, pour les corps métalliques, l'effort par centimètre carré, capable de produire le cisaillement, (la résistance de glissement ou de cisaillement), est sensiblement proportionnel à la résistance absolue de ces corps à l'extension. Les effets de cisaillement interviennent spécialement dans l'étude des rivets et des boulons de chaines. Mais on a également à tenir compte des efforts de glissement dans les phénomènes ordinaires de flexion.

Flexion d'un prisme. Résistance relative des matériaux.

Préliminaires. Les prismes peuvent être soumis à la flexion de différentes manières; nous considérons d'abord un cas spécial qui se présente, il est vrai, rarement dans la pratique, mais auquel peuvent se ramener tous les autres.

Imaginons qu'une tige, prismatique, naturellement droite, soit encastrée à l'une de ses extrémités, et que l'autre, restée libre, soit chargée d'un poids.

La fig. 7 représente cette tige non chargée, dans une position horizontale, et la fig. 9 sa section; par la flexion, elle prend une forme que nous supposons indiquée par la fig. 8. Pour nous représenter clairement l'état dans lequel se trouve l'intérieur de la tige, imaginons qu'elle soit formée d'un grand nombre de fibres parallèles et reliées entre elles. Supposons de plus que chacune de ces fibres soit composée d'une série d'éléments disposés en lignes droites, parallèles à l'axe, quand la tige est droite, tandis qu'après la flexion, elles formeront des lignes courbées équidistantes de la ligne extérieure de courbure a b. Soit i_1 k_1 la fibre qui, dans l'état naturel de la tige, passe par les centres de gravité des diverses sections et soit i k la même fibre après la flexion. Nous lui donnerons le nom de fibre axiale. Les conditions d'équilibre de la tige seront déterminées, si nous pouvons connaitre: 1°, l'état de tension ou de pression en chacun des points de la tige, 2°, la forme de chacune des fibres. Si l'on cherche à traiter cette question d'une manière rigoureuse, on se heurte à des difficultés insurmontables; mais si on se contente d'une approximation, on se trouve ramené à des problèmes relativement faciles et déjà maintes fois résolus.

Les calculs approchés indiqués ci-après reposent sur certaines hypothèses que nous nous bornerons à énoncer pour le moment, en nous réservant d'examiner plus tard jusqu'à quel point elles sont admissibles.

Nous admettrons: 1°, que tous les éléments primitivement situés dans une section plane e_1 g_1 se retrouvent encore, après la flexion, dans un même plan e g, normal, en e, à la fibre a b. e g représente donc la normale à la courbe a b au point e.

2°, que les éléments d'une même section conservent, après la déformation, leurs positions relatives, que, par suite, les diverses sections ne changent ni de forme ni de grandeur.

3°, que toutes les fibres, primitivement droites, forment après la flexion des lignes équidistantes de la fibre a e f b.

4°, que la flexion soit assez faible pour qu'on puisse appliquer les lois données pages 3 et 4 sur l'extension et la compression des tiges.

Une tige soumise à l'action d'une charge ne satisfera en réalité jamais complètement à ces hypothèses. Il est évident d'abord que la seconde ne peut pas être exactement remplie; si nous prenons en effet une tige à section carrée, par exemple, la flexion détermine un allongement en e f, et un raccourcissement en g h, d'où il résulte que la section doit se rétréeir à la partie supérieure et se dilater à la partie inférieure; cette section n'aura donc plus la forme de la fig. 1, Pl. II, mais bien celle de la fig. 2, et le même effet se produira pour toutes les autres sections. D'un autre côté, par le fait même d'un changement dans la forme des sections et du déplacement relatif qu'il entraine pour les molécules de chacune d'elles, les conditions 1, 3 et 4 ne sauraient elles-mêmes se trouver rigoureusement remplies. Bien plus, si l'on imagine une pièce à section très-aplatie, d'une épaisseur très-faible relativement à sa largeur, la forme d'équilibre qu'elle prendra, une fois chargée, pourra être très-différente de sa forme primitive. Ainsi, il pourra se produire une torsion, comme l'indique la fig. 3, ou des plis sur l'un des bords, comme dans la fig. 4.

Quoiqu'il en soit, nous admettrons, dans ce qui va suivre, les hypothèses précédentes, sans lesquelles les déplacements moléculaires et les changements de forme, dans le cas de fortes charges et de matières facilement compressibles, seraient d'une telle complication, qu'il nous serait absolument impossible de les déterminer par le calcul. L'ensemble de ces hypothèses a d'ailleurs une signification pratique extrêmement importante. Elles expriment les conditions auxquelles chaque élément pris à part doit satisfaire, pour pouvoir entrer comme solide dans une construction quelconque.

Il suit de là qu'en prenant pour point de départ de nos calculs ces quatre hypothèses, nous arriverons à des résultats qui seront toujours applicables aux constructions usuelles. Malheureusement, nous ne sommes pas en état d'indiquer, d'une façon précise, jusqu'à quelles limites nos résultats sont applicables, car nous ne saurions fixer, a priori, le moment où les déplacements moléculaires, dans une section, commencent à devenir sen-

sibles, pas plus que celui où il commence à se produire dans la pièce un renversement, un plissement ou un cisaillement. Toutefois, dans la plupart des cas que présente la construction des machines, le sentiment permet de choisir pour les diverses pièces des formes et des dimensions telles que nos hypothèses leur demeurent applicables.

Passons maintenant aux développements de la théorie, et étudions ce que deviennent les fibres élémentaires, comprises primitivement entre deux sections planes e_1 g_1 et f_1 h_1. Après la flexion, elles se retrouvent comprises, (en vertu de la 1[e] hypothèse), entre les plans e g et f h, normaux en e et en f à la ligne a e f b. Les traces de ces plans se rencontrent en O, au centre de courbure de l'élément d'arc e f.

Il est clair que l'on a $e f > e_1 f_1$ et $g h < g_1 h_1$. On a donc un allongement en e f, un raccourcissement en g h. Si l'on considère les fibres successives, en partant de e f en descendant, on voit qu'elles sont moins allongées que e f; au contraire, les fibres qu'on rencontre, en remontant à partir de g h, sont moins raccourcies que celle-ci. Il doit donc nécessairement se trouver quelque part, entre h et f, en q par exemple, un point où il n'y a ni allongement ni raccourcissement. Le même fait se reproduisant pour chaque section, il en resulte qu'il doit exister toute une tranche o p q t, qui n'est ni allongée ni raccourcie et que pour ce motif on désigne sous le nom de tranche neutre; la ligne suivant laquelle elle coupe le plan de la figure porte le nom de fibre neutre. Cette fibre neutre ne coïncide pas, en général, avec la fibre axiale i m n k. On voit d'ailleurs immédiatement que les tensions vont en croissant, à mesure qu'on s'éloigne de la fibre neutre vers le haut; il en est de même des pressions, à mesure qu'on descend davantage au dessous de cette fibre.

Remarquons en outre que, pour une même fibre, a e f b par ex., la tension n'est pas la même pour les différents points; elle va en croissant depuis b jusqu'en a. On comprend dès-lors qu'il existe dans la pièce entière des surfaces d'égale tension ou d'égale pression séparées les unes des autres par la tranche neutre.

Etablissement des équations d'équilibre. Si, par le point q, (fig. 8), on mène une ligne s q r parallèle à e g, on obtient deux triangles q s f et q r h dont les côtés limitent les allongements et les raccourcissements des différentes fibres primitivement comprises entre e_1 g_1 et f_1 h_1, (fig. 7).

Désignons par

ε le module d'élasticité de la matière supposé constant.

$n\,w = \zeta$ la distance d'un élément de fibre u w à la fibre d'axe.

$f\,n = z$ la distance de la fibre supérieure à la fibre d'arc.

$n\,q = v$ la distance de la fibre neutre à la fibre d'axe dans la section f h.

$\rho = O\,m = O\,n$ le rayon de courbure de l'élément d'arc m n.

x y les coordonnées du point n, l'origine des coordonnées étant en k, l'axe des abscisses horizontal, et celui des ordonnées vertical.

$S\ s\ \sigma$ les tensions dans les éléments de fibres m n, u w, e f.

$\Theta = m\,O\,n$ l'angle des normales menées aux points m et n.

$m_1\,n_1 = ds_0$ (fig. 7) la longueur primitive des éléments de fibres compris entre les plans $e_1\,g_1$ et $f_1\,h_1$.

Cela posé, d'après les lois de l'extension des tiges, on a les relations:

$$m\,n = d\,s_0\left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) = \rho\,\Theta \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$u\,w = d\,s_0\left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) = (\rho + \zeta)\,\Theta \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$e\,f = d\,s_0\left(1 + \frac{\sigma}{\varepsilon}\right) = (\rho + z)\,\Theta \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Des équations (1) et (2), on tire:

$$\frac{1 + \frac{s}{\varepsilon}}{1 + \frac{S}{\varepsilon}} = \frac{\rho + \zeta}{\rho} = 1 + \frac{\zeta}{\rho} \text{ ou}$$

$$1 + \frac{s}{\varepsilon} = \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{\zeta}{\rho}\right)$$

Comme $\frac{S}{\varepsilon}$ et $\frac{\zeta}{\rho}$ sont des grandeurs très-petites, on peut négliger le produit de ces deux quantités, et la dernière équation devient alors

$$s = S + \frac{\varepsilon}{\rho}\,\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

On trouve ainsi la valeur de la tension pour une fibre située à la distance ζ au dessus de la fibre d'axe. Cette tension s'annule pour $\zeta = -v$ c'est-à-dire qu'on a

$$o = S - \frac{E}{\varrho} v$$

ou

$$v = \frac{S\varrho}{\epsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Cette relation représente la distance de l'axe neutre, au dessous de la fibre d'axe, dans la section f g h. Si, dans l'équation (4), on remplace ζ par la valeur $z = n f$, s devient σ, et on a

$$\sigma = S + \frac{E}{\varrho} z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Partageons la section f h par des lignes horizontales en tranches infiniment minces, et soit d f la surface de la tranche élémentaire située à la distance w. Nous pouvons admettre que, dans tous les points de cette tranche, l'intensité de la tension reste constante et égale à s. Toutes les fibres de la section d f sont alors soumises à des tensions dont la résultante est $s\,df$, et $\zeta\, s\, df$ représente le moment statique de cette force par rapport à un axe passant par le point n et perpendiculaire au plan de la figure. Par suite, les intégrales, étendues à toute la section f h,

$$\int s\, df \text{ et } \int \zeta\, s\, df \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

représentent, la première, la somme de toutes les tensions et pressions qui s'exercent sur la section f h, la seconde, la somme des moments de ces forces. Si l'on remplace s par sa valeur tirée de l'équation (4) et si on intègre par rapport à ζ, S et ϱ étant des constantes, on obtient

$$\int s\, df = \int \left[S + \frac{\epsilon}{\varrho} \zeta \right] df = S \int df + \frac{\epsilon}{\varrho} \int \zeta\, df.$$

$$\int \zeta\, s\, df = \int \zeta \left[S + \frac{\epsilon}{\varrho} \zeta \right] df = S \int \zeta\, df + \frac{\epsilon}{\varrho} \int \zeta^2\, df.$$

Ω désignant la section de la tige, on a $\int df = \Omega$. Comme d'autre part les distances ζ sont comptées à partir du centre de gravité n de la section, $\int \zeta\, df = o$ et $\int \zeta^2\, df$ est le Moment

d'inertie de la surface par rapport à un axe passant par le centre de gravité. Posons pour abréger

$$\int \zeta^2 \, d f = z E \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

les intégrales précédentes deviennent

$$\left.\begin{aligned} \int s \, d f &= S \, \Omega \\ \int \zeta \, s \, d f &= \frac{\varepsilon}{\varrho} \, z E \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Pour que la portion n k de la pièce soit en équilibre, il faut que les actions moléculaires, développées dans la section f h, fassent équilibre à l'ensemble de forces extérieures qui agissent sur la portion n k. Si l'on désigne par φ (fig. 5, pl. 2) l'angle de la tangente en n à la fibre d'axe avec l'axe des abscisses k x, cet angle φ est également celui que forme la force P avec la direction de la normale f h. Remplaçons la force P par ses deux composantes $P \sin \varphi$ et $P \cos \varphi$, la première perpendiculaire sur f h, la deuxième parallèle à f h. En négligeant le poids propre de la pièce, il faut, pour l'équilibre, qu'il y ait égalité

1°, entre $P \sin \varphi$ et la somme de toutes les tensions et pressions qui s'exercent dans la section f h; 2°, entre $P x$ et la somme des moments de ces tensions et pressions; 3°, entre $P \cos \varphi$ et la force de glissement T, qui tend à séparer la partie f h b c de la pièce de l'autre partie a f d h, suivant le plan f h.

Nous obtenons ainsi les trois équations d'équilibre suivantes:

$$\left.\begin{aligned} P \sin \varphi &= \Omega \, S \\ P \cos \varphi &= T \\ P x &= \frac{\varepsilon}{\varrho} \, z E \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

D'autre part, on sait que le rayon de courbure d'une courbe plane est donné par la relation

$$\varrho = \pm \frac{d s^3}{d x \, d^2 y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

dans laquelle on doit prendre le signe + ou le signe —, suivant que la courbe tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des x. Dans le cas actuel, c'est le signe — que l'on doit prendre;

comme nous avons admis qu'il ne s'agissait que de flexions très faibles, nous pouvons, sans erreur sensible, remplacer ds par dx dans l'équation (11), qui devient alors:

$$\varrho = -\frac{dx^2}{d^2y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

Ces équations suffisent pour la solution de notre problème, et ce sont celles d'où nous partirons pour compléter notre étude.

Usage des équations d'équilibre. De la première des équations (10), on tire $S = \frac{P \sin \varphi}{\Omega}$

De la troisième, $\frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{P x}{E z}$.

Si l'on introduit ces valeurs dans les expressions (4), (5) et (6), on trouve:

$$s = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E z} x \zeta \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E} x \quad \ldots \ldots \ldots (14)$$

$$\upsilon = \frac{z E}{\Omega} \frac{\sin \varphi}{x} \quad \ldots \ldots \ldots (15)$$

Dans ces équations, $\sin \varphi$ est encore inconnu, mais on peut le déterminer ainsi qu'il suit, par l'équation de la fibre d'axe. En vertu des équations (10) et (12), on a:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{P}{\varepsilon z E} x \quad \ldots \ldots \ldots (16)$$

D'où, en intégrant:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \ldots (17)$$

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon z E} \left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3\right) \quad \ldots \ldots (18)$$

Dans ces équations, l représente la longueur de la pièce et les constantes ont été déterminées par la condition que l'on ait, pour $x = 0$, $y = 0$, et, pour $x = l$, $\frac{d y}{d x} = 0$. Or, on a exactement $\frac{d y}{d x} = \text{Tang } \varphi$ ou, approximativement, φ étant toujours un angle très petit, $\frac{d y}{d x} = \sin \varphi$, par suite, et en vertu de l'équation (17).

$$\sin \varphi = \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\,(l^2 - x^2) \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Si l'on introduit cette valeur de $\sin \varphi$ dans les relations (13), (14) et (15), elles deviennent:

$$s = \frac{P}{E\,z}\,x\,\zeta + \frac{P}{\Omega}\,\frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\,(l^2 - x^2) \quad \ldots \quad (20)$$

$$\sigma = \frac{P}{E}\,x + \frac{P}{\Omega}\,\frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\,(l^2 - x^2) \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

$$v = \frac{P}{2\,\Omega\,\varepsilon}\,\frac{l^2 - x^2}{x} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

et enfin, à cause de la relation (18),

$$y = \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\left(l^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3\right) \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Notre problème se trouve ainsi complètement résolu. L'équation (20) donne la tension en un point quelconque de l'intérieur de la tige; l'équation (21), la tension en un point quelconque de la fibre supérieure $a\,b$; l'équation (23) détermine la forme de la fibre passant par les centres de gravité des sections, enfin l'équation (22), celle de la fibre neutre.

Interprétation des résultats. Si, à l'aide de l'équation (22), on élimine $l^2 - x^2$ des équations (20) et (21), on trouve:

$$s = \frac{P\,x}{E\,z}\,(\zeta + v) \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Cette équation permet de suivre facilement la variation des tensions à l'intérieur de la tige.

En considérant x et v comme des coordonnées d'un système rectangulaire, l'équation (22) représente une hyperbole; mais, comme en réalité les valeurs de v doivent être portées normalement à la fibre d'axe, l'équation (22) représente, si l'on peut s'exprimer ainsi, une hyperbole infléchie.

Si, dans l'équation (24), on considère s comme une constante, cette équation donne, pour chaque valeur de x, les valeurs de $\zeta + v$ pour lesquelles s reste le même; en d'autres termes, l'équation (24) détermine une ligne d'égale tension.

Si l'on suppose que x et $\zeta + v$ soient des coordonnées rectangulaires, l'équation (24) représente une hyperbole. Mais, comme les valeurs de $\zeta + v$ doivent être portées à partir de la fibre

neutre dans une direction normale à la fibre des centres de gravité, l'équation (24) représente, à proprement parler, une hyperbole dont l'axe des abscisses est courbé suivant la direction de la fibre neutre.

Dans les fig. 6 et 7, pl. II, on a représenté les lignes d'égale tension.

La fig. 6 donne ces lignes pour le cas où la flexion de la tige est infiniment petite, c'est-à-dire pour le cas où v est négligeable par rapport à ζ. Ces lignes sont des hyperboles, qui ont pour asymptotes les axes de coordonnées k i et k l. Leur équation s'obtient en faisant, dans l'équation (24), $v = o$, ce qui donne :

$$\frac{s\,E\,z}{P} = x\,\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Les différences de tension entre deux lignes consécutives de cette espèce sont constantes; par suite, les différences des ordonnées de ces courbes sont également constantes.

Si l'on désigne par ζ_o la valeur de ζ pour $x = k\,i = l$, on a encore

$$\frac{s\,E\,z}{P} = \zeta_o\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

d'où

$$\zeta\,x = \zeta_o\,l, \qquad \zeta = \zeta_o \left(\frac{l}{x}\right) \quad . \quad . \quad (27)$$

Cette relation permet de tracer très-facilement la courbe dont l'origine est à une distance ζ_o du point i.

Le maximum de tension a lieu en a, le maximum de pression en d. Si J est la tension maximum en a, on l'obtient en faisant dans l'équation $\zeta = z$ et $x = l$, d'où

$$J = \frac{P\,l}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

La fig. 7 représente les courbes d'égale tension dans le cas où la tige a subi une flexion notable et où la fibre neutre o t s'écarte sensiblement de la fibre d'axe i k. Pour tracer ces courbes, on commence par construire, à l'aide de l'équation (23), la fibre i k des centres de gravité, puis, avec (22), la fibre neutre o t, et l'on reporte la série des ordonnées des lignes de la fig. 6, à partir de o t, normalement à la fibre d'axe. La tension maximum

se produit en a et se détermine en faisant $x = l$ et $\zeta = z$ dans l'équation (20). On obtient ainsi

$$J = \frac{P\,l}{E}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (29)$$

C'est-à-dire une expression de même forme que pour le cas d'une flexion infiniment faible. Pour $x = o$, et en vertu de (22), $v = \infty$, c'est-à-dire que, dans les environs du point k, la fibre neutre s'éloigne brusquement et très-vite de la fibre d'axe. La même chose se produit dans les points d'une tige infléchie pour lesquels le rayon de courbure de la ligne neutre devient infini. Ainsi considérons, par exemple, fig. 8, pl. II, le cas d'une tige reposant sur deux appuis, mais les dépassant de chaque côté et chargée à la fois à ses deux extrémités et en son milieu. Aux points β_1 et β_2 où se produisent les changements de sens des courbures, les rayons de courbure sont infinis et. dans ce cas, la fibre neutre de la tige entière est formée des 3 parties $\lambda\ \lambda_1\ \lambda_2$, dont les branches ont pour asymptotes les normales $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$.

Dans la plupart des applications de la théorie de l'élasticité, on n'a à s'occuper que de changements de forme assez faibles pour qu'on puisse toujours supposer que la fibre neutre coïncide avec la fibre des centres de gravité. Dans cette hypothèse, les équations de (20) à (23) donnent:

$$\left.\begin{array}{l} s = \dfrac{P}{E\,z}\,x\,\zeta \\[2ex] \sigma = \dfrac{P}{E}\,x \\[2ex] J = \dfrac{P\,l}{E} \\[2ex] v = o \\[2ex] y = \dfrac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\left(l^2 x - \dfrac{1}{3}\,x^3\right) \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (30)$$

Calcul des valeurs de E **et** z. Dans les formules auxquelles nous sommes arrivés, entrent les quantités z et E, qui ne dépendent que de la forme et de la grandeur de la section. z est la distance n f, (fig. 8, pl. I), d'un point f de la fibre supérieure a b à la fibre des centres de gravité. On détermine donc z en cherchant, d'après les méthodes connues, le centre de gravité d'une figure plane. Quant à E, nous l'avons introduit dans le

calcul, en posant $E z = \int \zeta^2 \, d f$, c'est-à-dire que $E z$ représente le moment d'inertie de la section de la tige par rapport à un axe horizontal passant par le centre de gravité. On a donc $E = \frac{\int \zeta^2 \, d f}{z}$, et on voit que la valeur de E, pour une section déterminée, s'obtient en cherchant le moment d'inertie de la section $\int \zeta^2 \, d f$ et en le divisant ensuite par z.

La planche III donne les valeurs de E pour différentes formes de cette section. Il est facile de comprendre, par quelques exemples, comment ces valeurs ont été déterminées. μ désignant le moment d'inertie d'une section, nous aurons

$$E = \frac{\mu}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Considérons d'abord le cas d'un rectangle, dont la hauteur soit h, et la largeur b, on a

$$\mu = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b \, d\zeta \, \zeta^2 = \frac{1}{12} \, b \, h^3 \text{ et } z = \frac{h}{2}$$

d'où

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{1}{6} \, b \, h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

pour un cercle de diamètre d, on a

$$z = \frac{d}{2} \, , \; \mu = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} 2 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \zeta^2} \, d \zeta \, \zeta^2 = \frac{\pi}{64} \, d^4$$

d'où

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{\pi}{32} \, d^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Pour une surface annulaire dont les diamètres sont d et d_1, on a

$$z = \frac{d}{2} \, , \quad \mu = \frac{\pi}{64} \, d^4 - \frac{\pi}{64} \, d_1^4$$

d'où

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{\pi}{32} \, \frac{d^4 - d_1^4}{d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Pour une section ayant la forme représentée fig. 12, pl. II.

$$z = \frac{1}{2}\,h \qquad \mu = \frac{1}{12}\,b\,h^3 - 2 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{2}\,(b - b_1)\,h_1^3$$

d'où

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{1}{6}\left[b\,h^3 - (b - b_1)\,h_1^3\right] \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Résistance relative.

Nous venons de voir que, dans le cas précédent, le maximum de tension se produit en a (fig. 8, pl. I) et le maximum de pression en d. Désignons par σ_m et P_m ces efforts maxima (rapportés à l'unité de section) et posons $i\,a = z$, $i\,d = z_1$; on a

$$\frac{P_m}{\sigma_m} = \frac{z_1}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Admettons que les résultats auxquels nous sommes arrivés pour la flexion d'une tige soient applicables, non seulement à des flexions très-faibles, mais encore à des déformations plus considérables, s'étendant jusqu'au point où il se produit une rupture des fibres, soit par allongement en a, soit par écrasement en d. On doit alors se demander quel est celui de ces deux effets de rupture, par arrachement en a ou par écrasement en d, qui se produira le premier. Soit A la résistance absolue de la matière, R la résistance à la compression; en comparant les quotients $\frac{A}{R}$ et $\frac{\sigma_m}{P_m} = \frac{z}{z_1}$, il est facile de reconnaître que, quand la flexion augmente, σ_m arrive à la limite A, avant que P_m n'atteigne la limite R, si on a $\frac{\sigma_m}{P_m} > \frac{A}{R}$. Par contre, l'écrasement se produira le premier, si $\frac{\sigma_m}{P_m} < \frac{A}{R}$. Enfin, les ruptures, par arrachement en a et par écrasement en d, se produiront simultanément, quand on aura $\frac{\sigma_m}{P_m} = \frac{A}{R}$. Comme d'ailleurs $\frac{\sigma_m}{P_m} = \frac{z}{z_1}$, on peut formuler les règles suivantes:

a) Rupture par arrachement, quand . . . $\frac{z}{z_1} > \frac{A}{R}$

b) Rupture par écrasement, ... $\frac{z}{z_1} < \frac{A}{R}$

c) Rupture par arrachement et écrasement simultanés, quand . . . . $\frac{z}{z_1} = \frac{A}{R}$

on a d'ailleurs pour le fer forgé $\frac{A}{R} = \frac{5}{4}$

" la fonte . . $\frac{A}{R} = \frac{1}{5 \cdot 5}$

" le bois . . $\frac{A}{R} = 2$

La rupture se produira donc

		pour le fer forgé	pour la fonte	pour le bois
a) par arrachement en a, quand	$\frac{z}{z_1} >$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5 \cdot 5}$	2
b) " écrasement en d, quand	$\frac{z}{z_1} <$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5 \cdot 5}$	2
c) " les deux effets simultanément, quand	$\frac{z}{z_1} =$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5 \cdot 5}$	2

Si l'on veut déterminer, pour un corps d'une section donnée, la résistance dont il est susceptible, c'est-à-dire la charge qui produirait sa rupture, on peut procéder de la manière suivante: on cherche d'abord la position du centre de gravité de la section, ce qui donne immédiatement les valeurs de z et z_1 et par suite le rapport $\frac{z}{z_1}$, et ce qui permet de vérifier, d'après la table précédente, si la rupture se produira par arrachement, ou par écrasement, ou par les deux effets simultanément.

Ainsi, supposons qu'on trouve, pour une pièce de fonte, $\frac{z}{z_1} = 1$; la rupture se produira par arrachement, car dans ce cas on a $\frac{z}{z_1} = 1 > \frac{1}{5 \cdot 5}$.

La rupture devant se produire par arrachement, on a, pour le pouvoir de résistance,

$$P = \frac{A\ E}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si au contraire la rupture devait se produire par écrasement, on prendrait la formule

$$P = \frac{z}{z_1} = \frac{R\ E}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Seulement, il importe de ne pas oublier que ces formules, comme celles que nous avons trouvées précédemment, ne seraient

exactes que si le coefficient d'élasticité avait une valeur invariable, ce qui n'est pas le cas pour de fortes flexions. Aussi les équations (2) et (3) ne sont-elles qu'une approximation assez grossière et on en fait rarement usage; il est bien préférable, à tous égards, de recourir à la détermination directe des valeurs de A et R au moyen d'expériences de flexion.

Le tableau placé à la fin de la Ire section contient, dans la colonne marquée R, les coefficients de rupture trouvés expérimentalement. Toutefois, ces coefficients ne s'appliquent qu'à des sections pour lesquelles $\frac{z}{z_1}$ est égal à l'unité ou en diffère peu. Pour les sections de cette nature, on peut donc écrire

$$P = \frac{R\ E}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Formes de sections avantageuses.

Les considérations qui précèdent nous permettent de reconnaitre quelles sont les conditions qui influent sur la résistance dont une poutre ou une tige est susceptible. Il est évident d'abord que les sections les plus avantageuses sont celles pour lesquelles la rupture se produirait à la fois par arrachement et par écrasement. Or, pour ces sections, on a:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{A}{R}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

pour le fer forgé, où $\frac{A}{R}$ est à peu près égal à l'unité, les sections favorables sont donc celles où deux lignes à angle droit, passant par le centre de gravité, partageront la section en 4 parties symétriques. Les sections rectangulaires et circulaires qui rentrent dans cette catégorie, ont de plus l'avantage de ne présenter aucune difficulté de fabrication. Pour le bois, $\frac{A}{R} = 2$; on devrait donc avoir $z = 2\ z_1$. Mais comme en réalité, en laissant de côté les assemblages complexes, on n'emploie jamais que des pièces de bois rondes ou rectangulaires, pour lesquelles $\frac{z}{z_1} = 1$, il en résulte que la rupture doit toujours se produire par écrasement.

Pour la fonte, où $\frac{A}{R} = \frac{1}{5{\cdot}5}$, il faudrait donc choisir des

formes telles que l'on eut $\frac{z}{z_1} = \frac{1}{5 \cdot 5}$. La forme en T (fig. 13, pl. II) satisfait particulièrement à cette condition. Si au contraire on prend pour la fonte des sections telles que deux lignes rectangulaires déterminent 4 parties symétriques, la rupture tend à se produire par arrachement.

Quant à l'influence de la grandeur et de la forme de la section, elle se trouve déterminée par la valeur de $E = \frac{\mu}{z}$.

Dans le moment d'inertie μ, les dimensions parallèles à la force qui tend à produire la flexion entrent au carré, tandis que la largeur n'entre qu'à la première puissance. On comprend dès lors que les sections particulièrement avantageuses seront celles où la matière se trouve condensée à la plus grande distance possible de la fibre neutre, et principalement aux points où la rupture tend à se produire par arrachement ou par écrasement. Parmi les formes de sections avantageuses figurent les rectangles de grande hauteur, les ellipses allongées, les couronnes cylindriques circulaires ou elliptiques, enfin les formes évidées vers la fibre d'axe et, pour la fonte en particulier, la forme en T.

Si, au contraire, on cherche à obtenir une pièce jouissant d'une grande flexibilité, comme dans le cas des ressorts, il faut donner à la section une faible hauteur et une grande largeur et recourir, par exemple, à un rectangle fortement allongé.

L'équation (4) montre que la résistance d'une poutre varie en raison inverse de sa longueur.

Coefficient de sécurité.

Nous désignerons sous ce nom le rapport entre la charge qu'une poutre supporte réellement et celle qui déterminerait la rupture. A part quelques cas exceptionnels, toutes les parties d'une construction, et notamment les pièces d'une machine, ne doivent jamais supporter de trop fortes charges. L'ensemble doit, en effet, non seulement pouvoir résister à la rupture, mais encore ne pas éprouver de déformations sensibles. On voit par là qu'en principe, il convient de rester toujours au dessous de la limite d'élasticité. Dans les machines, on admet les coëfficients de sécurité suivants: pour les cables $^1/_3$, pour les chaines $^1/_4$, pour les tiges de leviers $^1/_{10}$ à $^1/_8$, pour les arbres $^1/_{30}$ à $^1/_{20}$, pour les roues $^1/_{30}$ à $^1/_{20}$.

On peut également déterminer la charge de sécurité d'après le rapport entre la charge que la pièce doit réellement supporter et celle qui correspond à la limite d'élasticité. Dans la pratique, la détermination de la charge de sécurité s'obtient indifféremment de l'une ou de l'autre manière; il revient évidemment au même de poser en principe que la charge d'un corps ne doit pas dépasser $^1/_9$ de la charge de rupture, ou $^1/_3$ de la charge correspondant à la limite d'élasticité, puisque, dans tous les cas, l'expérience intervient pour déterminer les coefficients qu'il convient d'introduire dans le calcul. Dans ce qui va suivre, la charge de sécurité sera généralement rapportée à la charge de rupture.

Calcul des dimensions des sections.

Connaissant le coefficient de rupture B et le coefficient de sécurité, on peut en conclure immédiatement la tension qui doit s'exercer en a (fig. 8, pl. II), et si, pour une pièce à construire, on choisit une forme de section qui ne diffère pas notablement de la forme la plus avantageuse, on peut déterminer les dimensions avec une sécurité très-suffisante, dans tous les cas de la pratique, à l'aide de la formule

$$P\,l = a_m\,E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(la planche III donne les valeurs de E pour un grand nombre de sections différentes). Comme toutes les sections, à l'exception de celles qui sont circulaires ou carrées, ont plusieurs dimensions, la relation unique (1) ne suffit pas pour les déterminer toutes. Cette indétermination partielle des dimensions d'une section est souvent mise à profit pour remplir diverses autres conditions accessoires, d'une certaine importance dans la pratique. Si, par exemple, d'un arbre cylindrique on veut tirer une poutre à section rectangulaire, on peut fixer le rapport $\frac{h}{b}$ entre la hauteur et la base de ce rectangle, de manière à ce que la résistance de la poutre soit un maximum; cette condition se trouve remplie, comme il est facile de s'en assurer, si l'on pose $\frac{h}{b} = \sqrt{2} = 1{\cdot}414 = \frac{10}{7}$.
Dans d'autres cas, les questions de frais de modèle, d'aspect, de vides à ménager amènent, non seulement à choisir une certaine forme de section, mais encore à établir certains rapports entre ses différentes dimensions. Dans ce cas, on peut mettre l'ex-

pression de E sous la forme $E = a^3 H$, où a est une des dimensions, H une fonction des rapports adoptés pour les autres. Ainsi, pour un fer à double T, l'équation peut s'écrire

$$E = h^3 \frac{1}{6} \left\{ \frac{b_1}{h} \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 + \frac{b}{h} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 \right] \right\} \quad . \ . \ . \quad (2)$$

Si donc on prend pour $\frac{b_1}{h}$, $\frac{h_1}{h}$, $\frac{b}{h}$ des valeurs particulières, E ne contiendra plus qu'une indéterminée h, dont la valeur sera donnée par l'équation (1), en y remplaçant E par le second membre de la relation (2). On trouve ainsi

$$h = \sqrt[3]{\left\{ \frac{\frac{6 \, P \, l}{\sigma_m}}{\frac{b_1}{h} \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 + \frac{b}{h} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 \right]} \right\}} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Des divers modes de flexion.

Dans ce chapitre, nous traiterons encore quelques problèmes relatifs aux flexions, mais en négligeant l'écart très-faible qui existe entre la fibre neutre et la fibre axiale. Nous admettrons donc que la fibre passant par les centres de gravité soit la ligne neutre ou la ligne qui sépare les fibres allongées de celles qui sont raccourcies.

Sous cette réserve, nous nous proposerons de déterminer:
1°, la forme de la fibre des centres de gravité.
2°, les points où s'exercent les pressions maxima,
3°, les relations entre ces pressions maxima.

σE est la somme des moments statiques de toutes les tensions ou pressions qui s'exercent dans une section, les moments étant pris par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section, situé dans le plan de cette section et perpendiculaire à la direction de la force fléchissante. Désignons par M la somme des moments de toutes les forces extérieures qui font équilibre à ces tensions et à ces pressions; nous aurons

$$\sigma E = M \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Mais, d'après l'équation (6), pag. 17, en négligeant S, on a

$$\varrho \, \sigma = z \, \varepsilon \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

En éliminant σ, on trouve:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{\varepsilon E z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

comme, pour des flexions très-faibles, on peut poser $\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2 y}{d x^2}$, il en résulte que cette équation peut encore s'écrire

$$\pm \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{\varepsilon E z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Lorsque M est exprimé en fonction de x, l'équation précédente, intégrée, donne la forme de la fibre passant par les centres de gravité. De l'équation (1) on tire

$$\sigma = \frac{M}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Si on détermine les valeurs de x pour lesquelles M devient maximum, on en déduit les points où se produisent les maxima de tension; chacune de ces valeurs de x, introduite dans l'équation (5), donnera donc une valeur de σ_m, c'est-à-dire un maximum de tension.

Appliquons ces régles générales à quelques exemples.

1er cas. Une tige est encastrée à l'une des extrémités et chargée à l'autre. Le poids de la tige est p et on doit en tenir compte, fig. 1, pl. IV.

Prenons l'extrémité libre o pour origine d'un système de coordonnées et posons $o\,n = x$, $m\,n = y$; $p\,\frac{x}{l}$ est approximativement le poids de la partie $m\,o$ de la tige, et $p \times \frac{x}{l} \times \frac{x}{2}$ le moment approximatif de ce poids par rapport à un axe horizontal passant en m. La somme des moments des forces, qui tendent à rompre la tige en m, est par suite $M = P\,x + \frac{p}{l}\,\frac{x^2}{2}$. L'équation de la fibre passant par les centres de gravité est alors, en vertu de la relation (4),

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left(P\,x + \frac{p}{l}\,\frac{x^2}{2}\right)$$

On a dû prendre le signe —, car la courbe tourne sa concavité vers l'axe des x. En intégrant une première fois, on obtient

$$-\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left(\frac{1}{2} P\,x^2 + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,x^3\right) + \text{Const.}$$

pour $x = o\ n_1 = l$ (approximativement), on a exactement $\frac{dy}{dx} = o$, d'où

$$o = \frac{1}{\varepsilon E z}\left(\frac{1}{2} P l^2 + \frac{1}{6}\frac{p}{l} l^3\right) + \text{Const.}$$

et par suite, en retranchant les deux expressions,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2} P (l^2 - x^2) + \frac{1}{6}\frac{p}{l} l^3 - x^3\right],$$

dont l'intégrale est

$$y = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(\frac{1}{2} P l^2 + \frac{1}{6} p l^2\right) x - \frac{1}{6} P x^3 - \frac{1}{24}\frac{p}{l} x^4\right] \quad . \quad . \quad (6)$$

La constante est d'ailleurs nulle, puisque, pour $x = o$, $y = o$. L'équation précédente est celle de la fibre d'axe. Pour $x = l$, $x = m_1\ n_1 = f$, et on trouve

$$f = \frac{l^3}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{3} P + \frac{1}{8} p\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Le moment de flexion M est maximum pour $x = l$ et a alors pour valeur

$$M_m = P l + \frac{p l}{2}$$

La tension maximum au point d'encastrement est dès-lors, en vertu de (5),

$$\sigma_m = \frac{P l + \frac{p}{2} l}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

2me cas. La tige d'un poids p repose sur des appuis simples à ses deux extrémités, et est chargée en son milieu, (fig. 2, pl. IV).

Soient $2\,l$ l'écartement des points d'appui, $2\,P$ la charge au milieu. Chaque appui est alors soumis à une charge verticale égale à $P + \frac{p}{2}$. Prenons pour origine des coordonnées le point B et soient $x = B\,n$, $y = m\,n$ les coordonnées d'un point quelconque de la fibre d'axe; le moment des tensions et des pressions, qui s'exercent dans la section m, a pour valeur

$$\left(P + \frac{1}{2} p\right) x - \frac{p}{2 l} x \frac{x}{2} = M$$

D'où, en vertu de l'équation (4),

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\left(P + \frac{1}{2} p\right) x - \frac{p}{4 l} x^2}{\varepsilon E z}$$

En intégrant

$$-\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2} p\right) x^2 - \frac{p}{12 l} x^3 + \text{Const.}\right]$$

pour $x = l$, $\frac{d y}{d x} = o$. Donc

$$o = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2} p\right) l^2 - \frac{p}{12 l} l^3 + \text{Const.}\right]$$

et, par différence,

$$\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{p}{2}\right)\left(l^2 - x^2\right) - \frac{p}{12 l}\left(l^3 - x^3\right)\right];$$

une nouvelle intégration donne

$$y = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{p}{2}\right)\left(l^2 x - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{p}{12 l}\left(l^3 x - \frac{x^4}{4}\right)\right] \quad (9)$$

La flèche $C D = f$ a pour expression

$$f = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{p}{2}\right)\frac{2}{3} l^3 - \frac{p}{12 l}\frac{3}{4} l^4\right]$$

ou

$$f = \frac{l^3}{\varepsilon E z}\left[\frac{P}{3} + \frac{10}{96} p\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Entre $x = o$ et $x = l$, le moment M est maximum pour $x = l$, et a pour valeur

$$M_{max} = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

Par suite, la tension maximum qui s'exerce en D est donnée par la relation

$$\sigma_m E = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

3me cas. Une pièce, dont le poids propre est p, repose à ses deux extrémités sur des appuis simples. Elle est chargée de deux poids égaux à P, agissant à une distance c des extrémités, (fig. 3, pl. IV).

Soient $x = B n$, $y = m n$ les coordonnées d'un point m situé entre E et D, $x_1 = B n_1$, $y_1 = m_1 n_1$ celles d'un point m_1 compris entre E et B. Les moments M et M_1 des forces qui s'exercent sur les sections faites en m et m_1 ont pour expression

$$M = \left(P + \frac{p}{2}\right) x - P (x - c) - \frac{p}{2 l} x \frac{x}{2}$$

$$M_1 = \left(P + \frac{p}{2}\right) x - \frac{p}{2 l} x_1 \frac{x_1}{2}$$

ou

$$M = P c + \frac{1}{2} p x - \frac{p}{4 l} x^2$$

$$M_1 = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{4 l} x_1^2$$

Les équations des longueurs B E et E F de la pièce sont, par suite, en vertu de l'équation (4),

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[P c + \frac{p x}{2} - \frac{p x^2}{4 l}\right]$$

$$-\frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[\left(P + \frac{p}{2}\right) x_1 + \frac{p}{4 l} x_1^2\right]$$

La première de ces équations s'applique de $x = c$ à $x = l$, la seconde de $x_1 = o$ à $x_1 = c$.

Au point E, c-à-d. pour $x = x_1 = c$, les deux courbes, représentées par les deux équations, doivent avoir la même ordonnée et la même tangente, c'est-à-dire que, pour $x = x_1 = c$, on doit avoir $y = y_1$ et $\frac{d y}{d x} = \frac{d y_1}{d x_1}$.

En intégrant une première fois les deux équations, on trouve

$$-\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[P c x + \frac{1}{4} p x^2 - \frac{p x^3}{12 l}\right] + C$$

$$-\frac{d y_1}{d x_1} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[\left(P + \frac{p}{2}\right) \frac{x_1^2}{2} - \frac{p x_1^3}{12 l}\right] + C_1$$

C et C_1 représentant les constantes des intégrations. Comme, pour $x = x_1 = c$, on doit avoir $\frac{d y}{d x} = \frac{d y_1}{d x_1}$, il en résulte qu'il faut poser

$$\frac{1}{\varepsilon E z} \left[P c^2 + \frac{p c^2}{4} - \frac{p c^3}{12 l}\right] + C = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[\left(P + \frac{p}{2}\right) \frac{c^2}{2} - \frac{p c^3}{12 l}\right] + C_1$$

d'où on tire

$$\frac{P c^2}{2} = (C_1 - C)\,\varepsilon\,E\,z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Une nouvelle intégration donne

$$-y = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c \frac{x^2}{2} + \frac{p x^3}{12} - \frac{p x^4}{48 l}\right] + C x + B \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$-y_1 = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{p}{2}\right)\frac{x_1^3}{6} - \frac{p x_1^4}{48 l}\right] + C_1 x + B_1 \quad . \quad . \quad (13)$$

B et B_1 étant encore des constantes. Comme, pour $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, il en résulte que $B_1 = 0$. D'autre part, pour $x = x_1 = c$, $y = y_1$. Donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{P c^3}{2} + \frac{1}{12} p c^3 - \frac{p c^4}{48 l}\right] + C c + B = \\ \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{p}{2}\right)\frac{c^3}{6} - \frac{p c^4}{48 l}\right] + C_1 c \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

Enfin, pour $x = l$, $\frac{dy}{dx} = 0$, d'où

$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c l + \frac{p l^2}{4} - \frac{p l^3}{12 l}\right] + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Les équations (11), (14) et (15) permettent de déterminer les valeurs de C, C_1 et B. L'équation (14) donne, après réduction:

$$\frac{P c^3}{3}\left[(C - C_1)\,c + B\right]\varepsilon E z = 0$$

En remplaçant $C_1 - C$ par sa valeur tirée de (11), on a

$$B = -\frac{1}{6}\frac{P c^3}{E \varepsilon z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

D'autre part, de l'équation (15), on tire

$$C = -\frac{P c l + \frac{1}{6} p l^2}{E \varepsilon z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

d'où, en vertu de l'équation (11),

$$C_1 = -\frac{P c l + \frac{1}{6} p l^2 - \frac{P c^2}{2}}{E \varepsilon z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

En introduisant ces valeurs de B, C et C_1 dans les équations (12) et (13), on obtient

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{6} P c^2 + \left(P c l + \frac{1}{6} p l^2\right) x \right. \\ \left. -\frac{1}{2} P c x^2 - \frac{1}{12} p x^3 + \frac{p}{48 l} x^4\right] \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (19)$$

$$y_1 = -\frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P c l + \frac{1}{6} p l^2 - \frac{P c^2}{2}\right) x_1 - \left(P + \frac{p}{2}\right)\frac{x_1^3}{6} + \frac{p x_1^4}{48 l}\right] (20)$$

La charge que peut supporter une poutre, placée dans ces conditions, se trouve déterminée par la plus grande valeur des moments M et M_1. La valeur de M_1, maximum pour $x_1 = c$, correspond à la plus petite valeur de M qui se produit pour $x = c$, tandis que ce dernier moment a sa plus grande valeur pour $x = l$. On a en effet:

$$\frac{d M}{d x} = \frac{p}{2} - \frac{p x}{2 l} = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

expression qui s'annule pour $x = l$. La tension maximum se produit donc en D et a pour valeur

$$P c + \frac{p l}{4}$$

d'où

$$\sigma_m E = \left(P c + \frac{p l}{4}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

4me cas. Une pièce, dont le poids propre est p, repose sur deux appuis simples et est soumise à une charge 2 P en un point situé aux distances c et c_1 des extrémités (fig. 4, Pl. IV).

Soient $x = B n$, $y = m n$, $x_1 = A n_1$, $y_1 = n_1 m_1$, M et M_1 les moments pour les points m et m_1:

la réaction de l'appui B . . . . $= \frac{p}{2} + P \frac{c_1}{l}$

celle de l'appui A . . . . $= \frac{p}{2} + P \frac{c}{l}$

et l'on trouve

$$\left.\begin{array}{l} M = \left(\frac{p}{2} + \frac{P c_1}{l}\right) x - \frac{p}{2 l} x \cdot \frac{x}{2} \\ M_1 = \left(\frac{p}{2} + \frac{P c}{l}\right) x_1 - \frac{p}{2 l} x_1 \frac{x_1}{2} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

Les équations des parties B D et A D de la fibre d'axe sont par suite

$$\left(\frac{p}{2} + \frac{P c_1}{l}\right) x - \frac{p x^2}{4 l} = - \varepsilon E z \frac{d^2 y}{d x^2}$$

$$\left(\frac{p}{2} + \frac{P c}{l}\right) x_1 - \frac{p x_1^2}{4 l} = - \varepsilon E z \frac{d^2 y_1}{d x_1^2}$$

Une première intégration donne

$$\left.\begin{aligned} - \varepsilon E z \frac{d y}{d x} &= \left(\frac{p}{2} + \frac{P c_1}{l}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{p}{12 l} x^3 + C \\ - \varepsilon E z \frac{d y_1}{d x_1} &= \left(\frac{p}{2} + \frac{P c}{l}\right) \frac{x_1^2}{2} - \frac{p}{12 l} x_1^3 + C_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (23)$$

C et C_1 étant des constantes.

Si l'on mène la tangente en D et si on désigne par α et α_1 les angles qu'elle forme avec les directions positives des x et des x_1, on a $\alpha + \alpha_1 = \pi$, d'où $\tang \alpha + \tang \alpha_1 = o$.

Mais $\tang \alpha$ est la valeur de $\frac{d y}{d x}$ pour $x = c$, et $\tang \alpha_1$ la valeur de $\frac{d y_1}{d x_1}$ pour $x = c_1$, ce qui donne, en vertu de l'équation (23):

$$\left.\begin{aligned} o &= \left(\frac{1}{2} p + \frac{P c_1}{l}\right) \frac{c^2}{2} - \frac{p c^3}{12 l} + C \\ o &= \left(\frac{1}{2} p + \frac{P c}{l}\right) \frac{c_1^2}{2} - \frac{p c_1^3}{12 l} + C_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

En intégrant les équations (23), on a en outre

$$\left.\begin{aligned} - \varepsilon E z y &= \left(\frac{p}{2} + \frac{P c_1}{l}\right) \frac{x^3}{6} - \frac{p}{48 l} x^4 + C x + D \\ - \varepsilon E z y_1 &= \left(\frac{p}{2} + \frac{P c}{l}\right) \frac{x_1^3}{6} - \frac{p}{48 l} x_1^4 + C_1 x_1 + D_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (25)$$

Les constantes de ces dernières intégrales sont nulles, car pour $x = o$ et $x_1 = o$ on a $y = o$ et $y_1 = o$. D'autre part, pour $x = c$ et $x_1 = c_1$, on a $y = y_1 = f$, donc

$$\left(\frac{p}{2} + \frac{P c_1}{l}\right) \frac{c^3}{6} - \frac{p}{48 l} c^4 + C c = \left(\frac{p}{2} + \frac{P c}{l}\right) \frac{c_1^3}{6} - \frac{p}{48 l} c_1^4 + C_1 c_1 \quad (26)$$

Des équations (24) et (26), on tire les valeurs de C et C_1:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{-\left(\frac{p}{2}+\frac{P c_1}{l}\right)\frac{c^2}{2}\left(\frac{c}{3}+c_1\right)-\left(\frac{p}{2}+\frac{P c}{l}\right)\frac{c_1^3}{3}+\frac{p c_1^4}{16 l}+\frac{p c^3}{12 l}\left[\frac{c}{4}+c_1\right]}{c+c_1} \\ C_1 &= \frac{-\left(\frac{p}{2}+\frac{P c}{l}\right)\frac{c_1^2}{2}\left(\frac{c_1}{3}+c\right)-\left(\frac{p}{2}+\frac{P c_1}{l}\right)\frac{c^3}{3}+\frac{p c_1^4}{16 l}+\frac{p c_1^3}{12 l}\left[\frac{c_1}{4}+c\right]}{c+c_1} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Il ne reste plus ensuite qu'à introduire ces valeurs de C et C_1 dans les équations des courbes trouvées précédemment, et qui sont

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(\frac{p}{2}+\frac{P c_1}{l}\right)\frac{x^3}{6}-\frac{p}{48 l}x^4+C x\right] \\ y_1 &= -\frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(\frac{p}{2}+\frac{P c}{l}\right)\frac{x_1^3}{6}-\frac{p}{48 l}x_1^4+C_1 x_1\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (28)$$

Les moments M et M_1 vont en croissant à partir de B et A jusqu'en D, où ils atteignent tous les deux leur maximum; la section dangereuse correspond donc au point D. La valeur du moment maximum en ce point est

$$P\frac{c c_1}{l}+\frac{p c}{2}\left(l-\frac{c}{2 l}\right)=P\frac{c c_1}{l}+\frac{p c c_1}{4 l}=\frac{c c_1}{l}\left(P+\frac{p}{4}\right)$$

et on a, par suite,

$$\sigma_m E=\frac{c c_1}{l}\left(P+\frac{p}{4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

5me cas. Pièce encastrée en A, reposant librement en C et chargée en B (fig. 5, Pl. IV).

Soient

l — la distance horizontale des points A et C.
c — " " " " " B et C.
$x = C n$, $y = m n$ — les coordonnées d'un point situé entre B et C.
$x_1 = C n_1$, $y_1 = m_1 n_1$ — les coordonnées d'un point compris entre A et B.
P — la charge en B.
X — l'action inconnue exercée sur l'appui C.
α — l'angle que fait avec l'axe C A la tangente en B.
$Y = $ B D l'ordonnée du point B.

Si l'on pose, pour abréger

$$\left.\begin{aligned} \frac{X}{\varepsilon E z} &= m \\ \frac{P}{\varepsilon E z} &= n \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

et si on néglige le poids propre de la pièce, les équations des parties A C et B A de la fibre d'axe, seront

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - m x \qquad \frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = (n - m)\, x_1 - n c \quad . \; . \; . \quad (31)$$

qui, intégrées successivement deux fois, donnent

$$\frac{d y}{d x} = - \frac{m x^2}{2} + A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

$$y = - \frac{m x^3}{6} + A x + B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

$$\frac{d y_1}{d x_1} = (n - m)\, \frac{x_1^2}{2} - n c x_1 + A_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

$$y_1 = (n - m)\, \frac{x_1^3}{6}\; n c\, \frac{x_1^2}{2} + A_1 x_1 + B_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Comme, pour $x = o$, on doit avoir $y = o$, l'équation (33) conduit à $B = o$.

De plus, pour $x = c$, y doit être égal à Y, la même équation (33) donne donc

$$Y = - \frac{m c^3}{6} + A c$$

Pour $x = c$, on doit avoir $\frac{d y}{d x} = \operatorname{tg} \alpha$, et par suite en vertu de l'équation (32)

$$\operatorname{tang} \alpha = - \frac{m c^2}{2} + A.$$

pour $x_1 = l$, $y_1 = o$ d'où, en vertu de (35),

$$o = (n - m)\, \frac{l^3}{6} - n c\, \frac{l^2}{2} + A_1 l + B_1.$$

pour $x_1 = c$, $y_1 = Y$, et la même équation (35) donne alors

$$Y = (n - m)\, \frac{c^3}{6} - \frac{n c^3}{2} + A_1 c + B_1.$$

pour $x_1 = c$, on doit avoir $\frac{d y_1}{d x_1} = \tang \alpha$, ce qui, d'après (34), conduit à

$$\tang \alpha = (n - m) \frac{c^2}{2} - n c^2 + A_1$$

Enfin, pour $x_1 = l$, $\frac{d y_1}{d x_1} = o$ et par suite, en vertu de (34),

$$o = (n - m) \frac{l^2}{2} - n c l + A_1.$$

De ces différentes équations de condition, on tire:

$$m = n \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{c}{l} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{l} \right)^3 \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

$$Y = \frac{c^2 l}{2} (m + n) - \frac{c^3}{6} (m + 3 n) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

$$\tang \alpha = \frac{1}{2} (l - c) \left[m (l + c) - n (l - c) \right] \quad . \; . \; . \; . \quad (38)$$

$$A = \frac{1}{2} m l^2 - \frac{1}{2} n (l - c)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

$$B = c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

$$A_1 = n c l - (n - m) \frac{l^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

$$B_1 = - \frac{1}{2} n c l^2 + \frac{1}{3} (n - m) l^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

En se reportant aux relations (30), on voit que l'équation (36) détermine la pression X que supporte l'appui C. Si l'on porte la valeur de m, tirée de (36), dans les équations suivantes, on obtient les quantités Y, $\tang \alpha$, A, B, A_1 et B_1 exprimées en fonction des données du problème, et les équations (33) et (35) donnent alors la forme des courbes B C et B A.

Il reste encore à déterminer le point de la pièce, où se produit le maximum de tension. Ce point est celui où le rayon de courbure a la valeur la plus faible, c'est-à-dire celui qui correspond au maximum de l'une des expressions

$$m x \text{ et } (m - n) x_1 + n c$$

Supposons que l'on ait $m > n$, ce qui, d'après l'équation (36), se produira si on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c}{l}\right)^3 > \frac{3}{2}\left(\frac{c}{l}\right)$$

ou

$$\frac{c}{l} > \sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

$(m - n)\, x_1 + n\, c$ sera alors maximum, lorsque x_1 prendra sa plus grande valeur, c'est-à-dire pour $x_1 = l$ et ce maximum aura pour expression

$$(m - n)\, l + n\, c$$

Le maximum de $m\, x$ est d'autre part $m\, c$. La différence de ces deux maxima est donc

$$m\, c - [(m - n)\, l + n\, c] = -(m - n)\,(l - c)$$

cette valeur est négative, puisque l'on a $m > n$ et $l > c$. Le maximum de tension se produit donc en A, lorsqu'on a $m > n$.

Si, au contraire, on a $m < n$ ou $\frac{c}{l} < \sqrt{3}$, $(m - n)\, x_1 + n\, c$ sera maximum pour la plus petite valeur de x_1, c'est-à-dire pour $x_1 = c$ et aura pour expression $(m - n)\, c + n\, c = m\, c$. Le maximum de $m\, x$ est également $m\, c$. La tension maximum se produit donc en B quand on a $m < n$ ou $\frac{c}{l} < \sqrt{3}$.

Flexion par compression.

Etablissement des équations d'équilibre. Si une tige assez longue, (fig. 6, Pl. IV), repose verticalement sur un appui A et si elle est soumise à une pression verticale P, il se produit d'abord une compression, mais il peut en même temps se produire une flexion permanente. Nous allons étudier les conditions de cet état d'équilibre, en conservant les hypothèses formulées précédemment, page 13, pour la flexion ordinaire.

Soit $A\, A_1\, A_2$, (fig. 6, Pl. IV), la fibre des centres de gravité d'une tige quelconque $C\, B\, C_2\, B_2$, soumise à la fois à une pression et à une flexion.

Si, par un point quelconque m de cette fibre, on mène la normale $m_3\, m\, q$, il y aura sur cette ligne un certain point m_2 pour lequel il ne se produira ni allongement ni raccourcissement. Comme il en est évidemment de même pour chacune des sections normales, il en résulte qu'il existe une certaine ligne $D\, D_1\, D_2$, pour tous les points de laquelle il ne se produit ni allongement ni

raccourcissement; cette ligne constitue ce qu'on appelle l'axe neutre. Cette ligne ne tombe pas du reste nécessairement dans l'intérieur du corps; elle peut se trouver complètement à l'extérieur, et dans ce cas, c'est une ligne purement géométrique. Dans notre figure, la ligne neutre tombe, en partie dans l'intérieur du corps, en partie à l'extérieur. A gauche de cette ligne se produisent les extensions, à droite les compressions.

Prenons $A A_2$ pour axe des abscisses, et soient (fig. 6 et 7)

$x = A\,n$, $y = m\,n$ les coordonnées d'un point m de la fibre des centres de gravité.

$v = m\,m_2$ la distance comptée sur la normale entre la fibre neutre et celle des centres de gravité.

$\zeta = m\,m_1$ la distance d'une fibre quelconque comprimée à la fibre des centres de gravité, cette distance étant comptée comme la précédente.

$z = m\,m_3$, $z_1 = m\,q$ les distances de la fibre des centres de gravité aux fibres extrêmes qui limitent le corps.

N l'intensité de la pression au point m de la fibre des centres de gravité.

$\varphi = n\,m\,q$ l'angle de la normale $m\,q$ avec la direction des ordonnées. $\left(\text{on a rigoureusement } \operatorname{tang}\varphi = \frac{d\,y}{d\,x}\right)$.

Ω la section de la tige:

p l'intensité de la pression en m_1.

Cela posé, une méthode identique à celle qui nous a déjà servi pour traiter le problème fondamental de la flexion ordinaire, conduit aux relations suivantes:

$$p = N - \frac{\varepsilon}{\varrho}\,\zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$v = N\,\frac{\varrho}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La somme des pressions est $\int p\,d\,f = N\,\Omega$,

La somme des moments $\int \zeta\,p\,d\,f = \frac{\varepsilon\,z\,E}{\varrho}$.

Décomposons la force P en deux, $P\cos\varphi$ et $P\sin\varphi$. La première de ces composantes est celle qui détermine la compression des fibres dans la section $m_3\,q$, et l'on a, par suite,

$$N\,\Omega = P\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$P\,y = \frac{\iota}{\varrho}\,\varepsilon\,E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Mais on a aussi, approximativement,

$$\varrho = -\frac{d\,x^2}{d^2\,y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ces équations permettent de resoudre le problème posé.

En effet, si dans les équations (1) et (2), on remplace N et $\frac{\varrho}{\iota}$ par leurs valeurs tirées de (3) et (4), on obtient

$$p = \frac{P\cos\varphi}{\Omega} - \frac{P}{E\,\varepsilon}\,y\,\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\upsilon = \frac{E\,\varepsilon\cos\varphi}{\Omega\,y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Des équations (4) et (5), on tire d'ailleurs

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} + \frac{P}{\iota\,E\,\varepsilon}\,y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Et en posant, pour abréger,

$$\frac{P}{\iota\,E\,\varepsilon} = k^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

l'équation (8) a pour intégrale

$$y = B\sin k\,x + C\cos k\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

B et C étant les constantes de l'intégration. Comme, pour $x = 0$, $y = 0$, il en résulte que C doit être nul. On a donc simplement

$$y = B\sin k\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

et B représente la flexion maximum en A_1 (fig. 6, Pl. IV).

Si l'on pose $A\,A_2 = c$, pour $x = c$ on a $y = 0$, d'où

$$\sin k\,c = 0$$

Or, le plus petit angle différent de 0, dont le sinus soit nul, est π; nous avons donc

$$k\,c = \pi, \text{ d'où } k = \frac{\pi}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Si, dans l'équation (6), on fait $\zeta = 0$, on aura la pression qui s'exerce au point m de la fibre des centres de gravité; cette pression a pour expression $\frac{P\cos\varphi}{\Omega}$.

Si on considère φ comme une quantité infiniment petite dont on puisse négliger les puissances supérieures à la première, on peut remplacer $\cos \varphi$ par 1, et alors l'intensité de la pression pour la fibre d'axe est constante et égale à $\frac{P}{\Omega}$. Si on désigne par l la longueur de la tige à son état naturel, l'expression

$$l\left(1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

représente la longueur de la fibre d'axe comprimée et infléchie. Mais cette longueur est aussi exprimée par

$$2\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + B^2 k^2 \cos^2 kx.}$$

On a donc la relation

$$l\left(1 - \frac{P}{\Omega \varepsilon}\right) = 2\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + B^2 k^2 \cos^2 kx} \quad \ldots \quad (14)$$

Mais, si φ est infiniment petit, il en est de même de B. On peut donc écrire:

$$\sqrt{1 + B^2 k^2 \cos^2 kx} = 1 + \frac{1}{2} B^2 k^2 \cos^2 kx$$

d'où

$$\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + B^2 k^2 \cos^2 kx} = 2\int_0^{\frac{c}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} B^2 k^2 \cos^2 kx\right] dx$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{1}{2} B^2 k^2 \int_0^{\frac{c}{2}} \cos^2 kx \, dx$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{1}{2} B^2 k \frac{kc}{4} = \frac{c}{2}\left[1 + \frac{B^2 k^2}{4}\right].$$

L'équation (14) devient alors

$$l\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] = c\left[1 + \frac{B^2 k^2}{4}\right]$$

et on en tire

$$B = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{c}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1}$$

ou, en remplaçant c par sa valeur $\frac{\pi}{k}$ tirée de (12),

$$B = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{lk}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Nous trouvons donc ainsi la flexion maximum de la pièce. Mais cette expression ne donne pas toujours des valeurs réelles, car si P est petit, k est lui même très-petit, en vertu de l'équation (9). Dans l'état d'équilibre, il ne se produira donc de flexion que si P ou k sont assez grands pour que l'expression sous le radical soit positive, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{lk}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] > 1$$

Si l'on désigne par Q la valeur de P qui annule le terme placé sous le radical, Q sera la charge maximum que puisse supporter la tige en restant verticale, c'est-à-dire sans éprouver de flexion. Or, en tenant compte de l'équation (9), on a pour cette valeur de Q

$$\frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon z E}} \left[1 - \frac{Q}{\Omega \varepsilon}\right] = 1$$

ou, en négligeant $\frac{Q}{\Omega \varepsilon}$ par rapport à l'unité,

$$\frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon z E}} = 1$$

d'où

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Cette relation pouvait aussi se déduire directement de l'équation (12), c'est-à-dire $k = \frac{\pi}{c}$. On a, en effet, en vertu de (9), $k^2 = \frac{P}{\varepsilon z E}$ d'où

$$\frac{P}{\varepsilon z E} = \frac{\pi^2}{c^2}$$

$$P = \pi^2 \frac{1}{c^2} \varepsilon z E$$

Cette équation représente la charge qui détermine une flexion donnée. Si on prend pour c sa plus grande valeur, on obtient la charge qui détermine le minimum de flexion. Or, c est maximum et a pour limite $l\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right]$, lorsque la flexion disparait: si donc on fait dans l'équation précédente $c = l\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right]$ et $P = Q$, on obtient

$$Q = \frac{\pi^2\,\varepsilon\,z\,E}{l^2\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right]^2}$$

ou, comme on peut négliger $\frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}$ par rapport à l'unité,

$$Q = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2}$$

Il est d'ailleurs évident que la plus petite charge Q, capable de déterminer une flexion, est égale à la plus grande charge que peut supporter le corps sans fléchir.

Si nous résumons les divers résultats auxquels nous sommes arrivés, nous pouvons formuler les conclusions suivantes:

1°, à l'état d'équilibre, la tige est simplement comprimée, sans flexion, tant que la charge P reste égale ou inférieure à la limite

$$Q = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(17)$$

2°, la charge maximum que puisse supporter une pièce verticale est

$$Q = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(18)$$

3°, si la charge P est plus grande que cette valeur de Q, la pièce en équilibre sera à la fois comprimée et courbée. La plus grande flèche B est, en vertu de l'équation (15),

$$B = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{l\,k}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\,\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1}$$

où

$$k = \sqrt{\frac{P}{\varepsilon\,z\,E}}\quad\left.\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(19)$$

4°, à l'état de flexion, l'équation de la fibre des centres de gravité est

$$y = B \sin k x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

5°, l'intensité p de la pression en un point quelconque de la pièce courbe est, d'après l'équation (6),

$$p = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} = \frac{P}{E z} y \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

6° La distance v de la fibre neutre à la fibre des centres de gravité est, en vertu de l'équation (7),

$$v = \frac{E z \cos \varphi}{\Omega y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

7°, pour déterminer l'angle φ, on a la relation

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{d y}{d x} = B k \cos k x$$

L'équation (22) permet de déterminer la forme de la fibre neutre, si on a déterminé préalablement la fibre d'axe, à l'aide de la relation (20).

Flexion d'une pièce naturellement courbe.

Nous allons chercher à déterminer les conditions d'équilibre qui tendent à s'établir, lorsqu'une pièce, naturellement courbe, se trouve soumise à l'action de forces extérieures. Nous nous bornerons au cas où la ligne d'axe de la pièce, à l'état naturel, est une courbe plane, située dans un plan qui contient en même temps les points d'application et les directions de toutes les forces extérieures. Nous pouvons pour cette étude reprendre les fig. 7 et 8, Pl. I, en supposant que $l_1\, n_1\, m_1\, k_1$ soit la ligne d'axe courbe, et $e_1\, g_1$, $f_1\, h_1$ les normales aux points m_1 et n_1.

Pour définir l'état naturel de la pièce, (fig. 7, Pl. I), désignons par

ds_0 la longueur de l'élément d'arc $m_1\, n_1$.

ϱ_0 le rayon de courbure de $m_1\, n_1$.

$d\, \Theta_0$ l'angle infiniment petit des normales $e_1\, g_1$, $f_1\, h_1$ qui se coupent au centre de courbure.

$\zeta = n_1\, v_1$ la distance d'un élément $u_1\, v_1$ d'une fibre quelconque à la fibre des centres de gravité.

$z = n_1 f_1$, $z_1 = n_1 h_1$ les distances des fibres extrêmes à la fibre des centres de gravité.

Prenons maintenant la pièce déformée par l'action des forces extérieures, fig. 8, Pl. I, et soient

ϱ le rayon de courbure de l'élément d'arc m n.

d Θ l'angle infiniment petit m O n formé par les normales en m et en n.

Ω la section de la pièce.

$\zeta = n\,v$, $z = n\,f$, $z_1 = n\,h$ les mêmes longueurs que dans la pièce à l'état naturel.

S l'intensité de la tension qui s'exerce sur l'élément de fibre m n.

(Dans le cas où l'élément m n, au lieu d'être allongé, est comprimé, S désigne une pression et doit alors entrer dans les calculs avec le signe —).

$v = n\,q$ la distance de la fibre neutre à la fibre des centres de gravité.

σ l'intensité de la tension dans l'élément de fibre u v.

x y les coordonnées rectangulaires d'un point n de la fibre des centres de gravité, l'origine des coordonnées étant prise en un point arbitraire k.

φ l'angle de la tangente en n avec l'axe des x. On a rigoureusement $\tang \varphi = \frac{d\,y}{d\,x}$.

ε le module d'élasticité de la matière qui constitue la pièce.

M la somme des moments statiques de toutes les forces extérieures qui agissent sur la partie n k de la pièce pour déterminer une flexion, ou un accroissement de courbure; on a par suite $\varrho < \varrho_0$. (Les moments sont pris par rapport à un axe de rotation, passant par le point n et perpendiculaire au plan qui contient la ligne d'axe.)

K la somme algébrique de toutes les forces extérieures qui agissent sur la partie n k, comptées parallèlement à la tangente à la ligne d'axe au point n. En d'autres termes, k représente la somme des composantes, parallèles à la tangente en n, des forces extérieures; ces composantes sont d'ailleurs affectées du signe + ou du signe —, suivant qu'elles tendent à allonger ou à comprimer les éléments de fibres compris entre e g et f h.

Cela posé, on a

$$m_1 n_1 = d s_0 = \varrho_0 \, d\, \Theta_0, \qquad u_1 v_1 = (\varrho_0 + \zeta)\, d\, \Theta_0,$$

$$m\,n = \rho\, d\,\Theta = d\,s_0 \left(1 + \frac{S}{\epsilon}\right) \qquad u\,v = (\rho + \zeta)\, d\,\Theta$$

d'où

$$u\,v - u_1\,v_1 = (\rho + \zeta)\, d\,\Theta - (\rho_0 + \zeta)\, d\,\Theta_0 = \left[\left(1 + \frac{\zeta}{\rho}\right) \rho\, d\,\Theta - \right.$$

$$\left.\left(1 + \frac{\zeta}{\rho_0}\right) \rho_0\, d\,\Theta_0\right] = \left[\left(1 + \frac{\zeta}{\rho}\right) d\,s_0 \left(1 + \frac{S}{\epsilon}\right) - \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_0}\right) d\,s_0\right]$$

Mais $u\,v - u_1\,v_1$ est l'allongement éprouvé par la fibre dont la longueur primitive était

$$u_1\,v_1 = (\rho_0 + \zeta)\, d\,\Theta_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_0}\right) \rho_0\, d\,\Theta_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_0}\right) d\,s_0$$

et comme d'ailleurs la tension qui s'exerce en v est σ, on a aussi

$$u\,v - u_1\,v_1 = u_1\,v_1 \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

De telle sorte qu'on peut écrire

$$\left(1 + \frac{\zeta}{\rho}\right) d\,s_0 \left(1 + \frac{S}{\epsilon}\right) - \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_0}\right) d\,s_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_0}\right) d\,s_0 \frac{\sigma}{\epsilon}$$

ou

$$\left(1 + \frac{\zeta}{\rho}\right)\left(1 + \frac{S}{\epsilon}\right) = \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_0}\right)\left(1 + \frac{\sigma}{\epsilon}\right)$$

Dans toutes les applications, $\frac{\zeta}{\rho}$, $\frac{\zeta}{\rho_0}$, $\frac{S}{\epsilon}$, $\frac{\sigma}{\epsilon}$ sont des quantités très-petites dont on peut négliger les produits; la dernière équation donne alors

$$\sigma = S + \epsilon \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) \zeta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

On connait donc ainsi la valeur de la tension qui s'exerce à une distance ζ de la fibre d'axe. Si nous faisons, dans cette équation, $\zeta = -v$, σ devra être nul, car la fibre neutre satisfait précisément à la condition de n'éprouver ni extension ni compression. Nous trouvons ainsi

$$v = \frac{S}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) \epsilon} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Si S représentait une pression, elle devrait être affectée du signe —; dans ce cas v serait également négatif, et la fibre neutre tomberait au-dessus de la fibre d'axe.

Divisons la section f h (fig. 8), par des lignes perpendiculaires au plan de la figure, en un nombre infini de petites tranches, et soit d f la surface de la tranche située en w; les fibres de cette section d f sont alors soumises à la tension σ d f et les intégrales $\int \sigma \, d\,f$ et $\int \sigma \, \zeta \, d\,f$ représentent respectivement la somme de ces tensions et la somme de leurs moments pour l'ensemble de la section. Nous pouvons dans ces intégrales remplacer σ par la valeur que fournit la relation (1), ce qui donne:

$$\int \sigma \, d\,f = \int \left[S + \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \zeta \right] d\,f$$

$$\int \sigma \zeta \, d\,f = \int \left[S + \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \zeta \right] \zeta \, d\,f$$

intégrales, qui s'appliquent à toute la surface f h. Dans ces expressions ϱ est constant et la seule variable est ζ. Comme d'ailleurs on a supposé, que le point n était le centre de gravité de la section, il en résulte qu'on a $\int \zeta \, d\,f = 0$; $\int \zeta^2 \, d\,f$ est le moment d'inertie de la section et si nous le désignons par μ, nous aurons pour les intégrales

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma \, d\,f &= S\,\Omega \\ \int \sigma \, \zeta \, d\,f &= \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho^0} \right) \mu \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Mais, pour l'équilibre, il faut: 1°, que la somme K des forces extérieures soit égale à la somme de toutes les tensions intérieures développées dans la section f h, 2°, que la somme des moments de toutes les forces extérieures soit égale à la somme des moments des tensions qui s'exercent en f h.

Les conditions d'équilibre s'expriment donc par les relations

$$\left. \begin{aligned} S\,\Omega &= K \\ \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \mu &= M \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Si, dans les équations (1) et (2), on introduit les valeurs de S et de $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$, tirées de ces dernières relations, on trouve:

$$\sigma = \frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu} \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\nu = \frac{K}{\Omega} \frac{\mu}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

L'ensemble des équations (4), (5) et (6) donne la solution du problème proposé. La première des équations (4) détermine la tension, généralement variable, qui se produit en un point quelconque de la fibre des centres de gravité. La deuxième de ces relations donne la forme affectée par la fibre d'axe, après la déformation de la pièce. L'équation (6) détermine la fibre neutre, enfin l'équation (5) donne la tension en un point quelconque de l'intérieur de la pièce.

On peut encore se proposer de calculer l'intensité de l'effort, nécessaire pour produire une flexion déterminée.

Au moment où la flexion va commencer, la tension dans l'élément de fibre $u_1 v_1$ est nulle; lorsque la flexion s'est produite, cette tension est représentée par σ. A un certain moment, pendant que la flexion s'opère, la tension sur l'élément $u_1 v_1$ a une certaine valeur σ_1 et au même instant l'allongement correspondant se trouve représenté par $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{\sigma_1}{\varepsilon}$. Si l'on considère l'élément de temps qui vient immédiatement après, la flexion augmentant, la tension croît de $d \sigma_1$ et l'allongement augmente de $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d \sigma_1}{\varepsilon}$. L'effort nécessaire pour allonger de la quantité $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d \sigma_1}{\varepsilon}$ tous les éléments de la section $d f$ est par suite $\sigma_1 \; d f \; d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d s_1}{\varepsilon}$. Si l'on intègre cette expression par rapport à σ_1, entre les limites $\sigma_1 = 0$ et $\sigma_1 = \sigma_1$, on obtiendra l'effort total nécessaire pour faire passer le prisme de longueur $d s_0$ et de section $d f$ de l'état naturel à celui dans lequel la tension a la valeur σ et où le rayon de courbure de l'élément $m n$ est égal à ϱ. Cet effort total a pour expression:

$$d s_0 \, d f \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \sigma^2$$

ou, si l'on remplace σ par sa valeur tirée de l'équation (5),

$$d s_0 \, d f \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu} \zeta\right)^2.$$

En intégrant cette expression par rapport à ζ et pour la section entière, on obtient l'effort nécessaire pour amener la partie de la pièce comprise entre les plans $e_1\, g_1$ et $f_1\, h_1$ (fig. 7), de son état initial à celui dans lequel elle a pour rayon de courbure ϱ. Cette intégrale est:

$$d\, s_0\, \frac{1}{2\,\varepsilon} \int \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \left(\frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu}\, \zeta\right)^2 d\, f.$$

Négligeons $\frac{\zeta}{\varrho_0}$ par rapport à l'unité, ce qui peut se faire, sans erreur sensible, dans toutes les applications, nous arriverons ainsi à une formule beaucoup plus simple. Dans ces conditions, l'intégrale précédente devient:

$$\frac{d\, s_0}{2\,\varepsilon} \int \left[\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 + 2\, \frac{K}{\Omega}\, \frac{M}{\mu}\, \zeta + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \zeta^2\right] d\, f,$$

mais $\int d\, f = \Omega$, $\int \zeta\, d\, f = o$, $\int \zeta^2\, d\, f = \mu$,

On peut donc écrire:

$$\frac{d\, s_0}{2\,\varepsilon} \left[\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 \Omega + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \mu\right] = \frac{d\, s_0}{2\,\varepsilon} \left(\frac{K^2}{\Omega} + \frac{M^2}{\mu}\right).$$

Si enfin nous intégrons par rapport à s_0, entre les points de la fibre d'axe, qui limitent la partie pour laquelle on veut calculer l'effort, nous obtiendrons, en dernière analyse, l'effort W nécessaire pour courber une partie déterminée de la pièce,

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon} \int \left(\frac{K^2}{\Omega} + \frac{M^2}{\mu}\right) d\, s_0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Expression dans laquelle K et M sont des fonctions de s_0.

Si l'on remplace M par sa valeur tirée de la seconde des équations (4), on trouve

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon} \int \left[\frac{K^2}{\Omega} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \mu\right] d\, s_0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Nous allons appliquer à quelques exemples simples les résultats précédents.

1°. Une tige, naturellement droite, (fig. 1 pl. IV) est encastrée à l'une de ses extrémités et chargée à l'autre d'un poids P. Il se produit une flexion et on veut calculer l'effort qui correspond à cette flexion. Soient $x = o\, n$, $y = m\, n$ les coordonnées d'un point m de la ligne d'axe; $P\, x = M$ sera le moment fléchissant pour le point m. Si la déformation est très-faible, nous pou-

vons négliger K, attendu que, dans ce cas, la fibre d'axe n'éprouve pas d'allongement sensible. Faisons donc, dans l'équation (7), $M = P\,x$, $K = o$, $\mu = E\,z$ et remplaçons $d\,s_0$ par $d\,x$, ce qui est permis, puisque la flexion est supposée très-faible, nous trouvons ainsi:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^l \frac{P^2\,x^2}{E\,z}\,d\,x = \frac{P^2}{\sigma\,\varepsilon\,E\,z}\,l^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Si nous désignons par σ_m la tension maximum, qui se produit en a, nous aurons $\sigma_m\,E = P\,l$. En introduisant la valeur de P, tirée de cette dernière relation dans l'équation (9), il vient

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{\sigma_m{}^2}{\varepsilon}\,\frac{E\,l}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

2[0]. Une tige primitivement droite de longueur l est enroulée autour d'un cylindre de rayon R. On demande la grandeur de l'effort qui correspond à cette déformation.

Comme dans ce cas la fibre d'axe n'est pas allongée, on a d'abord $K = o$. D'autre part la pièce était primitivement droite, donc $\frac{1}{\varrho_0} = o$; comme après flexion elle a pris la forme d'un arc de cercle, $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} =$ constante. Nous obtenons donc, en vertu de la relation (8),

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon}\int^l \frac{\varepsilon^2\,\mu}{R^2}\,d\,s_0 = \frac{\varepsilon\,\mu\,l}{2\,R^2}.$$

Torsion des prismes.

Considérons un prisme fixé à l'une de ses extrémités et soumis à l'autre à l'action de forces formant couple; ce prisme éprouvera, sur toute son étendue, une torsion qui donnera lieu au développement de forces moléculaires capables de faire équilibre au couple extérieur.

Nous pouvons admettre, comme nous l'avons fait précédemment, que le prisme, à l'état naturel, se compose d'une série de fibres, parallèles à l'axe de la pièce, interposées et reliées entre elles; après la déformation, ces fibres, tout en restant reliées les unes aux autres, seront tordues, et, par suite, inclinées sur la direction de l'axe.

Les conditions d'équilibre du prisme seraient complétement déterminées, si l'on pouvait donner: 1°, la forme de chacune des fibres, 2°, les forces qui maintiennent chaque élément de fibre dans sa position d'équilibre.

Mais, comme cette détermination rigoureuse des conditions d'équilibre présenterait de très-grandes difficultés, nous nous contenterons de traiter la question d'une manière approximative, en ayant recours à certaines hypothèses, qui paraissent d'ailleurs très vraisemblables, sur l'état des fibres, après la torsion.

Nous admettrons donc: 1°, que toutes les molécules, situées primitivement dans une même section, conservent, pendant la torsion, leurs positions relatives; 2°, que chaque fibre prend, par suite de cette torsion, la forme d'une hélice. Si nous supposons de plus que la section soit symétrique par rapport à deux axes rectangulaires passant par son centre de gravité, il résulte des hypothèses précédentes que la fibre des centres de gravité ne prend aucune courbure, pendant la torsion du prisme, tandis que les autres fibres forment des hélices, dont l'inclinaison est d'autant plus forte qu'elles sont plus éloignées de l'axe.

Il en résulte également que la longueur des fibres doit aller en augmentant avec leur distance à l'axe. Comme d'ailleurs nous avons supposé que les forces extérieures ne pouvaient produire que des mouvements de rotation, il est évident que les fibres ne peuvent pas être toutes allongées ou toutes raccourcies, et qu'en réalité à l'allongement d'une partie de ces fibres doit correspondre le raccourcissement de l'autre partie. Les fibres voisines de l'axe devant être les plus courtes et celles de la périphérie les plus longues, on voit qu'il doit se produire une compression pour la fibre d'axe elle même et pour les fibres qui l'entourent jusqu'à une certaine distance. A partir de cette limite et jusqu'à la surface il ne doit se produire au contraire que des allongements. Il existe donc, dans l'intérieur du prisme, une surface cylindrique pour laquelle il n'y a ni allongement ni raccourcissement. Il serait facile de déterminer la position de cette surface, dans le cas d'une tige cylindrique, mais, comme ce problème n'offre aucun intérêt pour la pratique, nous le laisserons complètement de côté.

Si l'on imagine un plan perpendiculaire à l'axe du prisme et que l'on examine les déplacements relatifs qu'éprouvent, les unes par rapport aux autres, pendant la torsion, les molécules situées de chaque côté de ce plan, il est facile de reconnaître que ce déplacement n'est autre chose qu'un glissement, qui commence

à l'axe et va en croissant, à mesure qu'on considère des fibres de plus en plus éloignées de cet axe. Les forces moléculaires, qui correspondent à ces glissements, sont situées dans le plan de la section, normales sur les rayons, et il est naturel d'admettre que leurs intensités sont proportionnelles aux grandeurs des glissements.

Dans un prisme, soumis à un effort de torsion, la fibre passant par les centres de gravité reste droite. — Soient, en effet, (fig. 9, pl. IV), A le point, de position encore indéterminée, autour duquel s'effectue la rotation d'une section, m le point de la périphérie extérieure le plus éloigné de A, T l'intensité de la force de glissement en m, t l'intensité de la force de glissement en un point n, situé à une distance x de A; si l'on pose $A\,m = K$, on aura

$$t = \frac{T}{k}\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Prenons en n un élément de surface infiniment petit, d f; t d f sera la force, normale à A n, qui tendra à faire glisser cet élément de surface. Nous pouvons d'ailleurs remplacer cette force par ses deux composantes horizontale et verticale, $t\,d\,f\,\sin.\,\varphi$ et $t\,d\,f\,\cos.\,\varphi$. Soient $\xi = A\,p$, $v = n\,p$ les coordonnées du point n, rapportées au système d'axes rectangulaires $A\,\xi$ et $A\,v$; on a

$$\cos\,\varphi = \frac{\xi}{x},\ \sin.\,\varphi = \frac{v}{x}$$

d'où

$$t\,d\,f\,\sin\varphi = t\,d\,f\,\frac{v}{z},\qquad t\,d\,f\cos\varphi = t\,d\,f\,\frac{\xi}{x}$$

ou, si l'on remplace t par sa valeur tirée de (1),

$$t\,d\,f\,\sin\,\varphi = \frac{T}{k}\,v\,d\,f,\qquad t\,d\,f\cos\,\varphi = \frac{T}{k}\,\xi\,d\,f$$

On aura donc pour la somme de toutes les forces horizontales et verticales, qui tendent à faire glisser les molécules dans la section considérée,

$$\frac{T}{k}\int v\,d\,f,\qquad \frac{T}{k}\int \xi\,d\,f.$$

Mais, pour l'équilibre, il faut que ces sommes soient nulles, car, en vertu de notre hypothèse, il ne se produit qu'une torsion. Comme d'ailleurs $\frac{T}{k}$ ne saurait s'annuler, on a nécessairement

$$\int \xi \, d f = o, \quad \int v \, d f = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ces équations expriment précisément que le point A, autour duquel s'effectue la rotation, coïncide avec le centre de gravité de la section. Si, en effet, on désigne par X et Y les coordonnées de ce centre de gravité, rapportées aux mêmes axes A ξ et A v, on a, d'après les régles ordinaires qui servent pour déterminer le centre de gravité d'une surface,

$$X = \frac{\int \xi \, d f}{\int d f} \qquad Y = \frac{\int v \, d f}{\int d f}$$

si donc $\int \xi \, d f = o$ et $\int v \, d f = o$, on a $X = o$ $Y = o$, c'est-à-dire que le centre de gravité est précisément à l'origine des coordonnées.

Calcul de la résistance à la torsion. — Soient (fig. 9, pl. IV), $d f$ un élément infiniment petit d'une section, $x = A n$ la distance de cet élément à l'axe, T l'intensité de la force de glissement pour le point m le plus éloigné de l'axe, K la distance de ce point m à l'axe; l'intensité de la force de glissement par unité de surface, au point n, est $T \frac{x}{k}$; pour l'élément $d f$, la force de glissement sera $\frac{T}{k} x \, d f$ et son moment, par rapport au point A, $\frac{T}{k} x^2 \, d f$; par conséquent la somme des moments de toutes les forces de glissement, pour tous les éléments de la section, sera répresentée par $\int \frac{T}{k} x^2 \, d f$ ou $\frac{T}{k} \int x^2 \, d f$. Comme les forces intérieures doivent faire équilibre au couple extérieur, qui agit sur la tige, il en résulte qu'en désignant par M le moment de ce couple, on devra avoir

$$M = \frac{T}{k} \int x^2 \, d f . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$\int x^2 \, d f$ n'est autre chose que le moment d'inertie de la section par rapport à un axe, passant au centre de gravité et perpendiculaire au plan de cette section. Si l'on désigne ce moment d'inertie par μ, c'est-à-dire si l'on pose

$$\int x^2 \, d f = \mu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

l'équation (1) deviendra

$$M = \frac{T}{k} \mu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Comme d'ailleurs, dans tout ce chapitre sur l'élasticité et la résistance, nous sommes convenus de prendre le centimètre pour unité de longueur et le kilogramme pour unité de force, il en résulte que T représente la force de glissement, par centimètre carré, pour la fibre la plus éloignée de l'axe, et que M représente, en kilogrammes et en centimètres, le moment de torsion des forces extérieures agissant sur la tige.

Appliquons l'équation précédente à quelques cas particuliers.

Pour une tige cylindrique, d'un diamètre d, le moment d'inertie polaire est

$$\mu = \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 \, 2 \, x \, \pi \, d \, x = \frac{\pi}{32} d^4 \text{ et } k = \frac{d}{2}$$

d'où

$$M = \frac{T \pi}{16} d^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Pour une pièce à section carrée, dont le côté est b, on a

$$\mu = \frac{1}{6} b^4 \text{ et } k = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Par suite

$$M = T \frac{b^3}{3\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Pour une tige de section rectangulaire, a et b représentant les deux côtés, on a

$$\mu = \frac{1}{12} b h \left(b^2 + h^2\right)$$

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + h^2}$$

d'où

$$M = \frac{T}{6} b h \sqrt{b^2 + h^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

La théorie de la torsion, telle que nous venons de l'exposer, est trop incomplète pour qu'on puisse accorder une confiance absolue à ses indications. Dans ces, conditions il était indispensable de la soumettre au controle de l'expérience. C'est en réalité ce qui a été fait et les nombreux essais, entrepris dans ce but, ont montré que les résultats théoriques étaient parfaitement admissibles dans la pratique.

Si l'on suppose que les résultats précédents, établis pour de faibles déformations, soient encore applicables à des déformations plus étendues et même jusqu'à la limite où la cohésion moléculaire se trouve vaincue, l'équation (3) permettra de déterminer la valeur de T qui correspond à la résistance à la rupture par torsion. Il suffit pour cela de chercher, par une expérience directe, le moment de torsion M qui détermine la rupture, d'introduire cette valeur de M, ainsi que celles de μ et de K dans l'équation (3); la valeur de T, ainsi obtenue, constitue ce qu'on appelle le coefficient de rupture par torsion pour la matière dont se compose la tige soumise à l'expérience. Si d'ailleurs l'équation (3) peut s'appliquer jusqu'à cette limite, on devrait, pour une même matière, trouver constamment pour T la même valeur, en opérant sur des tiges de dimensions différentes. C'est ce qui parait vérifié, au moins approximativement, par les expériences directes de rupture. La colonne intitulée T, dans le tableau placé à la fin du chapitre, donne les coefficients de rupture par torsion pour différents matériaux.

La longueur de la tige n'entrant pas dans l'équation (3), il en résulte que l'intensité des forces de glissement et, par suite, le coefficient de rupture lui même sont indépendants de la longueur de la tige. D'un autre côté, l'équation (4) montre que, pour une tige cylindrique, le moment de torsion est proportionel au cube du diamètre du cylindre. Si donc on veut calculer le diamètre qu'il convient de donner à une tige cylindrique, pour qu'elle puisse résister sans danger à un moment de torsion déterminé, il suffit, dans l'équation (4), de remplacer T par une fraction aliquote du coefficient de rupture par torsion, et l'on trouve alors

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,M}{T\,\pi}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Nous verrons par la suite que, dans les machines, les dimensions des axes sont déterminées de manière à ce que, sous l'action

des forces extérieurs, la force de glissement par centimètre carré, ne dépasse en aucun point 210 kilogrammes pour le fer forgé, et 90 kilogrammes pour la fonte. Comme, d'après le tableau indiqué précédemment, la valeur du coefficient de rupture par torsion est de 7000 pour le fer et 3000 pour la fonte, il s'ensuit que les efforts limites de glissement admis pour ces pièces ne sont, en réalité, que $\frac{210}{7000} = \frac{1}{33}$ et $\frac{90}{3000} = \frac{1}{33}$ de ceux qui produiraient la rupture.

Calcul de l'angle de torsion. — Il nous reste maintenant à calculer l'angle de torsion Θ (fig. 10, pl. IV), c'est-à-dire l'angle dont tourne la section, soumise au couple de torsion, par rapport à l'extrémité encastrée de la tige. Pour effectuer ce calcul, nous supposerons, ce qui est en réalité très admissible, que l'angle α, formé par l'axe de la tige et la fibre soumise à l'effort de glissement T, est proportionnel à cette valeur de T; nous poserons donc

$$\alpha = \frac{T}{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

où G est un coefficient qui dépend de la nature de la matière et où α doit être représenté par une fraction de la circonférence. Si l'on considère le cylindre, sur lequel la fibre peut être supposée contenue et qu'on le développe sur un plan, on obtient un triangle A B C (fig. 10, pl. IV), où A C est la longueur l de la tige, B A C $= \alpha$ et B C $=$ K Θ, Θ représentant l'angle de torsion, exprimé également par une fraction de la circonférence. Ce triangle donne la relation

$$\frac{k\,\Theta}{l} = \text{tang}\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

ou, approximativement, comme α est très petit et qu'on peut remplacer tang. α par α,

$$\frac{k\,\Theta}{l} = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Des équations (8) et (10), on déduit

$$\frac{T}{G} = \frac{k\,\Theta}{l}$$

d'où

$$\Theta = \frac{T\,l}{k\,G}$$

Si nous remplaçons T par sa valeur tirée de l'équation (3), nous aurons

$$\Theta = \frac{M\,l}{G\,\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Si l'on veut exprimer l'angle de torsion Θ en degrés, et si on désigne dans ce cas sa valeur par $\Theta°$, on a

$$\Theta^0 = \frac{M\,l}{G\,\mu}\,\frac{360}{2\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Pour une tige cylindrique de diamètre d, $\mu = \frac{\pi}{32}\,d^4$; l'expression précédente devient alors

$$\Theta^0 = 16\,\frac{M\,l}{G}\,\frac{360}{d^4\,\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Les relations (11), (12), (13), reposent toutes sur l'hypothèse que l'angle α est proportionnel à la valeur de T. Les nombreuses expériences, faites sur la torsion des tiges, ont démontré que, au moins pour de faibles déformations, cette hypothèse est suffisamment exacte et que, par suite, les résultats, exprimés par ces relations, peuvent être regardés comme très approximativement vrais.

Si dans la formule (13), on fait $\frac{d^2\pi}{4} = 1$, $l = 1$ $\Theta° = 360°$, on en tire

$$G = M,$$

c'est-à-dire que le coefficient G, auquel on donne le nom de coefficient d'élasticité de torsion, n'est autre chose que le moment de torsion qui, en agissant sur une tige dont la section et la longueur seraient égales à l'unité, produirait précisément un déplacement de 360° de l'une des sections extrêmes par rapport à l'autre. Cette définition du coefficient G suppose, bien entendu, qu'on puisse étendre à des déformations de cette importance la loi exprimée par la relation (13).

Les valeurs expérimentales du coefficient d'élasticité de torsion, pour différents matériaux, sont contenues dans le tableau placé à la fin du chapitre.

Résistance des Réservoirs.

Réservoirs cylindriques. Supposons qu'un réservoir cylindrique (fig. 1, pl. V) soit soumis à l'action de fluides exerçant

des pressions uniformement réparties sur chaque unité de surface des parois intérieure et extérieure. Admettons de plus que la pression exercée sur cette dernière paroi soit notablement inférieure à l'autre; dans ce cas, sous l'action de ces pressions, l'enveloppe se dilatera, de telle manière que, si on considère un élément de volume à l'intérieur de la paroi, la matière se trouve comprimée dans la direction du rayon O r, (fig. 1, pl. V) et étendue dans la direction $t\,t_1$, perpendiculaire à la fois au rayon et à l'axe du cylindre.

Pour arriver à établir les conditions d'équilibre, il est indispensable de déterminer tout d'abord ces pressions et ces tensions.

Prenons le réservoir à son état naturel, quand il n'est soumis à aucune force, et soient r_0 le rayon intérieur du cylindre, r_1 son rayon extérieur, x le diamètre d'un cercle, compris entre ceux qui ont pour rayons r_0 et r_1. Désignons par p_0 et p_1 les pressions intérieure et extérieure par centimètre carré. Sous l'action des pressions, la capacité intérieure augmente, jusqu'à ce que les forces moléculaires développées fassent équilibre aux forces extérieures; soient ϱ_0, ϱ_1, ξ les nouvelles valeurs que prennent, dans la position d'équilibre, les rayons r_0, r_1, x. Soient de plus y la tension, par centimètre carré, suivant la direction de la tangente, à la distance ξ, z la pression, par centimètre carré, à la même distance, suivant la direction du rayon. Admettons enfin que l'effet de chacune des forces y et z soit indépendant de celui des autres. Nous pouvons alors, au moyen de la loi expérimentale que nous avons indiquée précédemment, calculer les allongements et les raccourcissements. La matière, qui se trouvait primitivement comprise entre les deux cylindres de rayons x et $x + d\,x$, se trouve contenue, après la déformation, entre les deux cylindres de rayons ξ et $\xi + d\,\xi$. On a par suite

$$2\pi\,\xi - 2\pi\,x = 2\pi\,(\xi - x)$$

pour l'extension, tandis que $d\,x - d\,\xi$ représente la compression de la matière.

Si nous désignons par ε le coefficient d'élasticité longitudinale, nous pouvons, d'après la loi expérimentale, rappelée plus haut, écrire les relations

$$\left.\begin{aligned} 2\pi\,(\xi - x) &= 2\pi\,x\,\frac{y}{\varepsilon} \\ d\,x - d\,\xi &= d\,x\,\frac{z}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\epsilon}\right) \\ d\,\xi &= d\,x\left(1 - \frac{z}{\epsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si l'on désigne par $d\,f$ la variation qui s'est produite, sous l'action des pressions, dans la surface de la couronne,

$$(x + d\,x)^2\,\pi - x^2\,\pi$$

on aura

$$d\,f = \left[(\xi + d\,\xi)^2\,\pi - \xi^2\,\pi\right] - \left[(x + d\,x)^2\,\pi - \pi\,x^2\right]$$

ou, comme $d\,x$ et $d\,\xi$ sont des différentielles,

$$d\,f = 2\,\pi\,(\xi\,d\,\xi - x\,d\,x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Si l'on remplace ξ et $d\,\xi$ par leurs valeurs tirées de (2), on trouve:

$$\frac{d\,f}{2\,\pi\,x\,d\,x} = \frac{1}{\epsilon}\,(y - x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Le premier membre de cette relation exprime la variation de surface pour un centimètre carré, et à la distance x; en d'autres termes c'est l'accroissement relatif de la surface. —

Lamé, dans sa théorie de l'élasticité, a démontré que cet accroissement relatif a, pour chaque point de la paroi cylindrique, une même valeur constante. Nous ne saurions ici reproduire la méthode analytique, employée par l'auteur, pour établir ce principe, et nous nous bornerons à le prendre comme postulatum. En admettant que $\frac{1}{\epsilon}\,(y - z)$ soit constant, il nous est facile d'en trouver la valeur, car pour $x = r_o$ on a $z = p_o$ et y prend une valeur déterminée A, c'est-à-dire la tension tangentielle à la circonférence intérieure du cylindre. La constante peut donc s'exprimer par $\frac{1}{\epsilon}\,(A - p_o)$, et l'on peut poser

$$\frac{1}{\epsilon}\,(y - z) = \frac{1}{\epsilon}\,(A - p_0)$$

on a alors, au lieu de l'équation (4),

$$\frac{d\,f}{2\,\pi\,x\,d\,x} = \frac{1}{\epsilon}\,(A - p_0)$$

En intégrant, on trouve:

$$f = \frac{1}{\varepsilon} (A - p_0)\, 2\, \pi \frac{x^2}{2} + \text{Const.}$$

ou, entre les limites $x = r_0$ et $x = x$,

$$f = \frac{\pi}{\varepsilon} (A - p_0)(x^2 - r_0^2) \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

Or f est la variation de surface que subit la matière, depuis r_0 jusqu'à x. On a donc aussi

$$f = (\xi^2 - \rho_0^2)\,\pi - (x^2 - r_0^2)\,\pi \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

Ces deux dernières relations conduisent à la suivante,

$$(\xi^2 - \rho_0^2) - (x^2 - r_0^2) = \frac{1}{\varepsilon} (A - p_0)(x^2 - r_0^2) \quad \dots \quad (7)$$

Or, si l'on fait, dans la première des équations (2), $x = r_0$, $y = A$, $\xi = \rho_0$, on obtient $\rho_0 = r_0 \left(1 + \frac{A}{\varepsilon}\right)$.

En introduisant cette valeur de ρ_0, ainsi que celle de ξ, dans l'équation précédente (7), celle-ci devient, après quelques réductions simples, et en négligeant les secondes puissances de $\frac{y}{\varepsilon}$ et $\frac{A}{\varepsilon}$,

$$y = \frac{A - p_0}{2} + \frac{A + p_0}{2} \frac{r_0^2}{x^2} \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

En substituant cette valeur de y dans l'équation $\frac{1}{\varepsilon}(y - z) = \frac{1}{\varepsilon}(A - p_0)$, on trouve aussi, pour la valeur de z,

$$z = \frac{A + p_0}{2} \frac{x_0^2}{x^2} - \frac{1}{2}(A - p_0) \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

On connait donc ainsi la tension tangentielle y et la pression suivant le rayon z, pour un élément situé à la distance x.

Maintenant $2\int_{r_0}^{r_1} y\, dx$ représente la somme de toutes les tensions sur les éléments de la paroi qui se trouvent sur un même diamètre; d'un autre côté, $2\, r_0\, p_0$ et $2\, r_1\, p_1$ sont les pressions intérieure et extérieure du fluide qui déterminent ces tensions moléculaires. On doit donc avoir

$$2\int_{r_0}^{r_1} y \, dx = 2 (r_0 p_0 - r_1 p_1)$$

Si l'on remplace y par sa valeur tirée de (7), et si on effectue l'intégration, on obtient, après réductions, la relation

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt{\frac{A + p_0}{A + 2 p_1 - p_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Si D est le diamètre intérieur du cylindre, δ l'épaisseur de la paroi, c'est-à-dire si l'on pose $r_1 - r_0 = \delta$, $2 r_0 = D$, la relation (10) devient:

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{A + p_0}{A + 2 p_1 - p_0}} - 1\right) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

En général, p_0 et p_1 sont très-petits par rapport à A, et on peut alors remplacer la relation (11) par une autre approchée; on a, en effet, exactement,

$$\sqrt{\frac{A + p_0}{A + 2 p_1 - p_0}} - 1 = \left(1 + 2\,\frac{p_0 - p_1}{A + 2 p_1 - p_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

ou, approximativement,

$$\sqrt{\frac{A + p_0}{A + 2 p_1 - p_0}} - 1 = \frac{p_0 - p_1}{A + 2 p_1 - p_0}$$

d'où on tire, également par approximation,

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{p_0 - p_1}{A + 2 p_1 - p_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Lamé a trouvé la formule (10) sans partir d'aucune hypothèse.

Si, dans l'une des formules (11) ou (12), on remplace A par la résistance absolue de la matière, dont le cylindre est formé, ces relations donneront les épaisseurs de parois pour lesquelles le cylindre éclaterait, sous l'action des forces p_0 et p_1. Si l'on prend les pressions p_0 et p_1 telles que $A + 2 p_1 - p_0 = o$ ou

$$p_0 = A + 2 p_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

δ devient infini. En d'autres termes, quelle que soit l'épaisseur de la paroi, il y aura toujours rupture du cylindre, lorsque la pres-

sion intérieure aura la valeur donnée par l'équation (13). En général, la pression extérieure p_1 est celle de l'atmosphère; elle est donc très petite par rapport à la valeur du coefficient de rupture, et en négligeant le terme $2\, p_1$ par rapport à A, le fait de rupture, que nous venons de signaler, peut s'énoncer simplement de la manière suivante: lorsque la pression dn fluide, par centimètre carré, à l'intérieur du cylindre, est égale à la résistance absolue de la matière, le cylindre éclate, quelle que soit l'épaisseur donnée à ses parois. —

En prenant pour A les valeurs suivantes,

Fonte	Fer forgé	Bronze de canons	Acier
1300	4000	2600	10000

comme la pression d'une atmosphère sur un centimètre carré représente à-peu-près 1 kilogramme, on voit que chacun de ces nombres exprime, en atmosphères, la pression intérieure limite à laquelle puisse résister un récipient cylindrique formé de la matière correspondante. Ainsi, par exemple, l'on ne pourrait pas comprimer de l'air à 2000 atmosphères dans un cylindre en fonte, tandis qu'un cylindre formé de l'un quelconque des autres métaux résisterait parfaitement à une semblable pression.

Dans les presses hydrauliques, on donne généralement aux parois, comme épaisseur, le rayon du cylindre intérieur, ce qui revient à faire $\delta = \frac{D}{2}$. Pour la fonte, il serait imprudent de dépasser la moitié de la résistance à la rupture, on doit donc prendre pour A, au plus $\frac{1300}{2}$ ou 650. La pression extérieure p_1 de l'atmosphère est environ 1 kilogramme; si donc, dans la formule (12) nous faisons $\delta = \frac{D}{2}$, $A = 650$, $p_1 = 1$, nous trouvons $p_o = \frac{1}{2}(A + 3\, p_1) = 326$. Il suit de là, que dans les conditions de construction admises plus haut, et pour de la fonte de très bonne qualité, la pression intérieure de l'eau ne doit pas dépasser 326 atmosphères, pour que la fonte ne travaille pas à une tension supérieure à la moitié de celle qui déterminerait la rupture.

Réservoirs sphériques. — Désignons encore, comme précédemment, par r_o et r_1 les rayons intérieur et extérieur de l'en-

veloppe, à l'état naturel et par x un rayon quelconque, intermédiaire entre r_o et r_1. Soient ρ_o, ρ_1, ξ les valeurs que prennent ces rayons, lorsque l'enveloppe est soumise à des efforts. Soient enfin y l'effort tangentiel en un point situé à la distance ξ du centre, z la pression normale pour le même point.

Si l'on considère deux zônes sphériques, dont les rayons étaient primitivement x et $x + d\,x$, la matière qu'elles délimitaient se trouve, après l'action des pressions, comprise entre les deux zônes de rayons ξ et $\xi + d\,\xi$. La compression linéaire suivant le rayon est donc $d\,x - d\,\xi$; l'extension linéaire pour le cercle $2\,\pi\,x$ est de même $2\,\pi\,(\xi - x)$. On a par conséquent:

$$2\,\pi\,(\xi - x) = 2\,\pi\,x\,\frac{y}{\epsilon}$$

$$d\,x - d\,\xi = d\,x\,\frac{z}{\epsilon}$$

d'où l'on tire:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x\left(1 + \frac{y}{\epsilon}\right) \\ d\,\xi = d\,x\left(1 - \frac{z}{\epsilon}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ϵ représentant le module d'élasticité.

Désignons par $d\,V$ le changement de volume qu'a subi la matière comprise entre les surfaces sphériques de rayons x et $x + d\,x$, on a:

$$d\,V = \frac{4}{3}\,\pi\left[(\xi + d\,\xi)^3 - \xi^3\right] - \frac{4}{3}\,\pi\left[(x + d\,x)^3 - x^3\right]$$

ou, comme $d\,\xi$ et $d\,x$ sont des différentielles,

$$d\,V = 4\,\pi\,(\xi^2\,d\,\xi - x^2\,d\,x).$$

Si l'on remplace ξ et $d\,\xi$ par leurs valeurs tirées de (1), on a:

$$d\,V = 4\,\pi\,x^2\,d\,x\left[\left(1 + \frac{y}{\epsilon}\right)^2\left(1 - \frac{z}{\epsilon}\right) - 1\right]$$

Dans toutes les applications, $\frac{y}{\epsilon}$ et $\frac{z}{\epsilon}$ sont des grandeurs très petites on peut donc négliger leurs carrés et leur puissances plus élevées; l'équation devient alors:

$$\frac{d\,V}{4\,\pi\,x^2\,d\,x} = \frac{2\,y - z}{\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Ce quotient exprime le coefficient de dilatation, à la distance x.

Admettons, comme précédemment, que ce coefficient conserve la même valeur pour tous les points de l'enveloppe, en d'autres termes, que $\frac{2\,y - z}{\varepsilon}$ est constant. Soient p_0 la pression intérieure, p_1 la pression extérieure, par centimètre carré, A l'intensité de la tension sur la zône intérieure; pour $y = A$, on doit avoir $z = p_0$, d'où:

$$\frac{2\,y - z}{\varepsilon} = \frac{2\,A - p_0}{\varepsilon} = \text{Const.}$$

L'équation (2) peut donc s'écrire:

$$\frac{d\,V}{4\,\pi\,x^2\,d\,x} = \frac{2\,A - p_0}{\varepsilon}$$

En intégrant on trouve:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,x^3\,\frac{2\,A - p_0}{\varepsilon} + \text{Const.}$$

Si on prend l'intégrale entre les limites $x = r_0$ et $x = x$, on obtient:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{2\,A - p_0}{\varepsilon}\,(x^3 - r_0^3),$$

expression qui donne le changement de volume pour la partie comprise entre les rayons r_0 et x. Mais on a également pour cette même variation:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,(\xi^3 - \varrho_0^3) - \frac{4}{3}\,\pi\,(x^3 - r_0^3)$$

d'où, en égalant les deux valeurs de V et faisant disparaître le facteur commun $\frac{4}{3}\,\pi$:

$$(\xi^3 - \varrho_0^3) - (x^3 - r_0^3) = \frac{2\,A - p_0}{\varepsilon}\,(x^3 - r_0^3) \quad . \; . \; . \quad (3)$$



Or, en vertu des relations (1), on a:

$$\xi = x\left(1 + \frac{y}{\epsilon}\right)$$

$$e_0 = r_0\left(1 + \frac{A}{\epsilon}\right)$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (3), développant et négligeant les puissances de $\frac{y}{\epsilon}$ et $\frac{A}{\epsilon}$ supérieures à la première, on trouve:

$$y = \frac{2\,A - p_0}{3} + \frac{A + p_0}{3}\,\frac{r_0^3}{x^3} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

expression qui donne la valeur de la tension pour les points situés à la distance x.

L'équation d'équilibre entre les pressions du fluide et les tensions de la matière s'établit de la manière suivante. Par le centre de la sphère faisons passer un plan, qui la partage en deux parties égales; chacune des parties est soumise intérieurement à une pression $r_0^2\,\pi\,p_0$, extérieurement à une pression $r_1^2\,\pi\,p_0$. La différence $\pi\,(r_0^2\,p_0 - r_1^2\,p_1)$ doit être égale à la somme de toutes les tensions moléculaires qui s'exercent aux différents points de la section annulaire de l'enveloppe.

On a par suite:

$$\int_{r_0}^{r_1} 2\,\pi\,x\,d\,x\,y = \pi\,(r_0^2\,p_0 - r_1^2\,p_1)$$

Si l'on remplace y par sa valeur tirée de l'équation (4) et qu'on intégre, on trouve pour $\frac{r_1}{r_0}$:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{2\,(A + p_0)}{2\,A + 3\,p_1 - p_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

On peut d'ailleurs, comme précédemment, remplacer ce radical par une valeur approchée plus simple.

On a rigoureusement:

$$\sqrt[3]{\frac{2\,(A + p_0)}{2\,A + 3\,p_1 - p_0}} = \left(1 + 3\,\frac{p_0 - p_1}{2\,A + 3\,p_1 - p_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ou, approximativement. en admettant que la fraction qui figure entre parenthèses est très petite:

$$\sqrt[3]{\frac{(2\,A + p_0)}{2\,A + 3\,p_1 - p_0}} = 1 + \frac{p_0 - p_1}{2\,A + 3\,p_1 - p_0}$$

on tire de là, en désignant par δ l'épaisseur de l'enveloppe, par D le diamètre intérieur, c'est-à-dire en posant $r_1 - r_0 = \delta$, $2\,r_0 = D$,

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{p_0 - p_1}{2\,A + 3\,p_1 - p_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

La formule (5) fournit exactement, et la formule (6) approximativement, l'épaisseur qu'il faut donner à un réservoir sphérique pour que, sous l'action des pressions intérieures et extérieures, les tensions moléculaires A de la paroi intérieure aient une certaine valeur déterminée. Si l'on remplace A par le coefficient de rupture de la matière considérée, les formules donneront l'épaisseur pour laquelle les pressions p_0 et p_1 détermineront la rupture. Cette épaisseur devient infinie pour $2\,A + 3\,p_1 - p_0 = 0$, ou pour

$$p_0 = 2\,A + 3\,p_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

C'est-à-dire qu'en supposant la pression extérieure p_1 négligeable, un réservoir sphérique éclatera sous une pression intérieure double de la résistance absolue de la matière. Si l'on compare ce résultat avec celui que nous avons trouvé, page 64, pour les réservoirs cylindriques, on voit qu'une enveloppe sphérique peut résister à une pression maximum double de celle qui ferait éclater une enveloppe cylindrique de même diamètre.

Lorsque nous avons calculé la valeur de δ, nous avons admis que la pression intérieure était plus grande que la pression extérieure; mais l'expression, que nous avons trouvée pour δ, s'applique encore dans le cas inverse, où la pression extérieure est plus grande que la pression intérieure. Seulement, comme A devient alors une pression, il convient de le prendre négativement.

Si un réservoir cylindrique ou sphérique avait partout exactement la même épaisseur et s'il était formé d'un métal parfaitement homogène, il serait difficile de comprendre comment il pourrait s'écraser sous l'action d'une pression extérieure. Mais



il suffit que l'enveloppe présente, en un point, une épaisseur plus faible pour que, sous l'action de la pression extérieure, il se produise une déformation, qui peut avoir pour résultat un écrasement général. On voit donc que les réservoirs à section circulaire, soumis à une pression intérieure, présentent une stabilité plus grande que ceux qui ont à résister à une pression extérieure.

Réservoirs de formes diverses. — Lorsqu'un réservoir, soumis à l'action de pressions, affecte une forme différente de la forme cylindrique ou sphérique, son enveloppe éprouve non seulement des efforts de compression et d'allongement, mais encore, dans la plupart des cas, elle se déforme et la forme nouvelle qu'elle affecte n'est plus géométriquement semblable à celle qu'elle avait primitivement. C'est, par exemple, ce qui se présente avec les chaudières à parois planes. La théorie de la résistance, appliquée à des chaudières de ce genre, conduit à des calculs longs et pénibles qui ne sauraient trouver leur place ici. Nous nous bornerons donc à faire remarquer que, toutes les fois qu'il s'agit de résister à des pressions considérables, il importe d'éviter, autant que possible, les formes différentes du cylindre ou de la sphère.

Calcul des efforts nécessaires pour allonger, comprimer, tordre ou fléchir une tige.

Allongement. — Soient ε le coefficient d'élasticité de la matière dont la tige est formée, l la longueur de cette tige, a sa section, K la force qui peut lui donner un allongement x; nous avons, en vertu de la loi de l'allongement :

$$K = \frac{a\varepsilon}{l}\, x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Le travail nécessaire pour allonger la tige de $x = o$ à $x = \lambda$ est $\int_o^\lambda K\, d\, x = W$. Nous avons donc, en vertu de l'équation (1) :

$$W = \frac{a\varepsilon}{l} \int_o^\lambda x\, d\, x = \frac{1}{2}\,\frac{a\varepsilon}{l}\,\lambda^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Désignons par P la force de traction correspondant à l'allongement λ; nous aurons, d'après la relation (1):

$$P = \frac{a\,\epsilon}{l}\,\lambda \qquad (3)$$

Si l'on tire de cette dernière relation la valeur de λ et si on la porte dans l'équation (2), on obtient, après une transformation simple:

$$W = \frac{1}{2}\,a\,l\,\frac{\left(\frac{P}{a}\right)^2}{\epsilon} \qquad (4)$$

Or $a\,l$ est le volume de la tige; $\frac{P}{a}$ l'intensité de la tension lorsque l'allongement s'est produit. Si l'on pose, pour abréger, $a\,l = V$, $\frac{P}{a} = \sigma$, on obtient:

$$W = \frac{1}{2}\,V\,\frac{\sigma^2}{\epsilon} \qquad (5)$$

L'allongement d'une tige exige donc un travail proportionnel à la fois au volume de cette tige et au quotient obtenu, en divisant le carré de la tension à la fin de l'allongement par le module d'élasticité. Si l'on admet que l'équation (1) et la loi qu'elle exprime soient applicables jusqu'à la limite de rupture, au moment même de la rupture, σ devient égal à la résistance absolue de la matière A, et le travail capable de produire la rupture par allongement a, dès lors, pour expression:

$$W = \frac{1}{2}\,V\,\frac{A^2}{\epsilon}$$

Seulement, pour chaque matière, $\frac{A^2}{\epsilon}$ prend une valeur différente, que l'on trouvera dans le tableau placé à la fin du chapitre. Le quotient $\frac{A^2}{\epsilon}$, obtenu en divisant la résistance absolue par le coefficient d'élasticité, peut être désigné sous le nom de module du travail d'allongement; nous pouvons dire alors que le travail nécessaire pour la rupture d'une tige est proportionnel au volume de la tige et au module du travail d'allongement.

Les valeurs de $\frac{A^2}{\epsilon}$ sont, pour la fonte, le chêne, le fer

forgé, le bronze des canons, l'acier fondu, respectivement dans le rapport des nombres

1 à 1·7, 4·3, 7·4, 10, 40,

Tandis que les résistances absolues des mêmes matières sont comme les nombres

1 à 1·3, 0·7, 4, 2·6, 10,

Les quantités de travail, nécessaires pour produire la rupture, sont donc entre elles dans des rapports très-différents de ceux des nombres qui expriment les résistances absolues.

Si l'on cherche à déterminer la rupture d'une tige par la force vive d'une masse, cette force vive doit être précisément égale au travail dont nous venons de donner l'expression.

Les chiffres précédents expriment donc également la capacité de résistance contre l'action des forces vives. Leur simple examen montre que la fonte est la matière de beaucoup la moins avantageuse pour la construction de pièces susceptibles de résister à des forces vives. Le chêne, le fer forgé et surtout le bronze et l'acier sont infiniment préférables. Si donc le prix de ces deux derniers métaux n'était pas aussi élevé, on devrait recourir à leur emploi pour la construction des pièces exposées à des chocs ou à des vibrations. En pratique, à défaut de ces matières, on emploie généralement le fer forgé, dont la résistance est environ sept fois plus grande que celle de la fonte; l'emploi de cette dernière matière n'est admis que dans des cas relativement beaucoup plus rares.

Flexion d'une tige. Supposons qu'une tige, encastrée à l'une de ses extrémités, soit soumise, à l'autre, à l'action d'une force extérieure. La force K, nécessaire pour abaisser l'extrémité libre de la tige d'une quantité ξ, se trouve déterminée par l'équation (7), page 31, lorsqu'on y fait $p = o$:

$$K = \frac{3\,\epsilon\,E\,z}{l^3}\,\xi \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Le travail W, que doit développer cette force pour que la flèche passe de o à λ, est

$$W = \int_o^\lambda K\,d\,\xi = \frac{3\,\epsilon\,E\,z}{l^3}\int_o^\lambda \xi\,d\,\xi = \frac{3\,\epsilon\,E\,z}{2\,l^3}\,\lambda^2 \, . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Si l'on désigne par P l'effort correspondant à la flèche λ, l'équation (1) donne:

$$P = \frac{3 \epsilon E z}{l^3} \lambda \qquad (3)$$

L'élimination de λ entre les équations (2) et (3) conduit à:

$$W = \frac{P^2 l^3}{6 \epsilon E z} \qquad (4)$$

Soit σ la tension maximum, par centimètre carré, qui se produit dans la section d'encastrement, sous l'action de la force P, on a:

$$\sigma E = P l \qquad (5)$$

et, par l'élimination de P,

$$W = \frac{1}{6} \frac{\sigma^2}{\epsilon} \frac{E l}{z} \qquad (6)$$

En désignant par V le volume de la tige, on a:

	$\frac{E l}{z}$	W	
Pour une tige rectangulaire	$\frac{1}{3} V$	$\frac{1}{18} \frac{\sigma^2}{\epsilon} V$	
„ „ „ cylindrique	$\frac{1}{4} V$	$\frac{1}{24} \frac{\sigma^2}{\epsilon} V$	(7)
„ „ „ elliptique	$\frac{1}{5} V$	$\frac{1}{24} \frac{\sigma^2}{\epsilon} V$	

On trouve les mêmes résultats, lorsque l'on admet que la tige repose sur deux appuis et est soumise, en son milieu, à une force capable de déterminer en ce point une tension maximum égale à σ. Si l'on suppose encore que la loi, exprimée par l'équation (1), reste applicable jusqu'à la limite de rupture, et qu'on remplace σ par le coefficient de résistance à la rupture B, les formules (6) et (7) donnent la quantité de travail nécessaire pour déterminer la rupture par flexion d'une tige. Toutefois ce travail de rupture ne reste proportionnel au volume que pour les formes simples et à section pleine; ainsi, pour un cylindre creux, par exemple, on a:

$$\frac{E}{z} = \frac{\pi}{16}\,\frac{d^4 - d_1^4}{d^2}$$

d'où

$$W = \frac{1}{24}\,\frac{\sigma}{\varepsilon}\,V\left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]$$

formule qui montre que le travail de rupture n'est pas toujours proportionnel au volume.

Torsion d'une tige. — Si une tige fixée à l'une de ses extrémités est soumise, à l'autre, à l'action d'un couple M, il se produit, comme nous l'avons vu, une torsion, en vertu de laquelle la section, correspondant au plan du couple, tourne, par rapport à la section encastrée, d'un angle Θ. La valeur de cet angle, (qui a pour mesure celle de l'arc dans le cercle de rayon 1) est d'après l'équation (11) page 59:

$$\Theta = \frac{M\,l}{G\,\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Le travail, nécessaire pour tordre la tige d'un angle α, a pour expression:

$$W = \int_0^\alpha M\,d\,\Theta$$

Ou, en remplaçant M par sa valeur tirée de la relation (1),

$$W = \int_0^\alpha \frac{G\,\mu\,\Theta}{l}\,d\,\Theta = \frac{1}{2}\,\frac{G\,\mu}{l}\,\alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

M_1 désignant la valeur du moment qui correspond à l'angle α, on a, en vertu de l'équation (1):

$$\alpha = \frac{M_1\,l}{G\,\mu}$$

valeur qui, substituée dans l'expression précédente, donne:

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{M_1^2\,l}{G\,\mu}$$

Soit T l'intensité de la force de glissement pour la fibre la plus éloignée de l'axe; on a, d'après l'équation (3), page 57:

$$M_1 = \frac{T\,\mu}{k}$$

et par suite:

$$W = \frac{1}{2} \frac{T^2}{G} \left(\frac{\mu}{k^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Pour une tige cylindrique pleine, de diamètre d, le moment d'inertie μ d'une section est égal à $\frac{\pi}{32} d^4$ et $k = \frac{d}{2}$; on a donc:

$$W = \frac{1}{4} \frac{T^2}{G} V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

V désignant le volume de la tige.

Pour une pièce à section carrée, $\mu = \frac{1}{6} b^4$, $k = \frac{b}{\sqrt{2}}$, l'équation (3) donne alors:

$$W = \frac{1}{6} \frac{T^2}{G} V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Pour le cas d'un cylindre creux, de diamètres d et d_1, on a $\mu = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4)$ et $k = \frac{d}{2}$; par suite

$$W = \frac{1}{4} \frac{T^2}{G} V \left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Si, dans ces formules, on remplace T par le coefficient de rupture par torsion, la valeur du second membre de chacune d'elles représente la quantité de travail nécessaire pour produire la rupture. Les valeurs de $\frac{T^2}{G}$, pour différents matériaux, sont inscrites dans le tableau placé à la fin du chapitre.

La comparaison des résultats obtenus pour les quantités de travail, correspondant à la traction, à la flexion et à la torsion, montre que ces quantités sont proportionnelles au module du travail (rapport du coefficient de résistance au coefficient d'élasticité) dans tous les cas, et de plus au volume de la tige, pour les corps de formes simples et à section pleine.

Solides d'égale résistance.

On nomme solides d'égale résistance les corps dont les formes sont telles que, pour une certaine disposition des forces exté-

rieures, toutes les sections travaillent également ou, en d'autres termes, sont également exposées à la rupture. Nous allons chercher à déterminer les formes qui satisfont à cette condition.

Résistance absolue. Si une tige droite, formée d'une matière homogène et placée horizontalement, est soumise à une force de traction, dirigée suivant son axe, toutes les parties de cette tige auront des tensions égales, à la condition que toutes les sections soient égales.

Si, au contraire, on dispose verticalement une tige très longue, qu'on la fixe à son extrémité supérieure et qu'on la charge à l'autre, cette tige devra présenter des sections successivement croissantes, depuis le bas jusqu'en haut, si l'on veut que toutes ces sections aient à supporter des tensions égales par unité de surface.

Soient P le poids suspendu à l'extrémité de la tige (fig. 2, pl. V), γ le poids d'un centimètre cube de la matière dont elle est formée, A la tension par centimètre carré pour toutes les sections, Ω la section de la tige à une hauteur x au-dessus du point le plus bas, G le poids de la portion de tige, de longueur x. L'effort qui agit sur la section Ω est $G + P$ et $\frac{G+P}{\Omega} = A$ représente la tension par unité de surface dans cette section. Si on considère la section voisine, située à la distance $x + dx$, le poids de la portion de tige, de longueur dx, sera $\gamma \Omega dx$, et par suite la force agissant sur cette section sera $G + \gamma \Omega dx + P$; et comme la surface est $\Omega + d\Omega$, on devra avoir $\frac{G + \gamma \Omega dx + P}{\Omega + d\Omega}$ $= A$.

De ces deux valeurs de A, on tire:

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\gamma}{A} dx$$

ou, en intégrant,

$$\Omega = C e^{\frac{\gamma}{A} x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

expression dans laquelle $e = 2{,}718$ est la base des logarithmes naturels et C la constante d'intégration. Comme d'ailleurs pour l'extrémité, c'est-à-dire pour $x = o$, on doit avoir $\Omega = \frac{P}{A}$, il en résulte que C est égal à $\frac{P}{A}$; on a donc:

$$\varrho = \frac{P}{A} e^{\frac{\gamma}{A} x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Au point de vue pratique, cette formule ne présente aucun intérêt, car il serait beaucoup trop difficile, et par suite trop dispendieux, de donner à des tiges d'une grande longueur la forme compliquée que fournit l'équation.

Lorsqu'il s'agit d'installer des tiges d'une assez grande longueur pour que leur poids propre ne soit pas négligeable par rapport à la charge que doit supporter leur extrémité, on se contente de recourir à une solution approchée; on compose la longueur totale d'une série de tiges, présentant chacune une section constante, calculée de manière à ce que chaque tige puisse résister sans danger à l'effort qui s'exerce à sa partie supérieure.

Le calcul des dimensions à donner à chacune des sections peut d'ailleurs se faire de la manière suivante:

Soient $a_1, a_2, a_3 \ldots$ les sections, $l_1, l_2, l_3 \ldots$ les longueurs des tiges (fig. 3, pl. V), γ le poids d'un centimètre cube de la matière qui les compose, A la tension par unité de surface dans la section supérieure de chaque tige, Q la charge suspendue à l'extrémité de la tige inférieure.

Ces notations établies, on a évidemment:

$$A = \frac{1}{a_1}(Q + a_1 l_1 \gamma) = \frac{1}{a_2}(Q + a_1 l_1 \gamma + a_2 l_2 \gamma)$$

$$= \frac{1}{a_3}(Q + a_1 l_1 \gamma + a_2 l_2 \gamma + a_3 l_3 \gamma).$$

D'où on tire:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{A - l_1 \gamma} \\ a_2 &= \frac{Q + a_1 l_1 \gamma}{A - l_2 \gamma} \\ a_3 &= \frac{Q + a_1 l_1 \gamma + a_2 l_2 \gamma}{A - l_3 \gamma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

relations qui permettent de déterminer les sections des différentes tiges. En substituant successivement à a_1 et à a_2 leurs valeurs, un obtient encore :

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{A - l_1 \gamma} \\ a_2 &= \frac{Q\ A}{(A - l_1 \gamma)(A - l_2 \gamma)} \\ a_3 &= \frac{Q\ A^2}{(A - l_1 \gamma)\ (A - l_2 \gamma)\ (A - l_3 \gamma)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Résistance à la flexion. Lorsqu'une pièce, présentant la même section sur toute son étendue, est soumise à une force extérieure qui tend à lui donner une certaine courbure, il se produit, en un point déterminé, un maximum de tension. La pièce est donc plus faible dans la section correspondante que dans toutes les autres; la tige ne peut donc être un solide d'égale résistance contre la flexion, qu'à la condition de faire varier les dimensions des sections.

Soit M le moment des forces extérieures qui, pour une section donnée, déterminent les actions moléculaires; en désignant par σ la tension maximum, par unité de surface, dans cette section, on a $M = \sigma E$, formule dans laquelle E doit avoir une des valeurs fournies par la planche III. E étant exprimé en fonction des dimensions de la section et M en fonction des forces extérieures et de la position de la section, on voit qu'en considérant σ comme une constante, l'équation précédente est précisément celle d'un solide d'égale résistance. — Nous allons donner quelques exemples pour indiquer la marche à suivre dans les calculs de ce genre.

Premier exemple. — Une tige, encastrée à l'une de ses extrémités, est chargée à l'autre d'un poids P (fig. 4, pl. V); on admet que son épaisseur reste partout la même et qu'on ne fasse varier que la hauteur. Soient h cette hauteur au point d'encastrement et y cette même hauteur à la distance x de l'extrémité libre. Dans chacune des sections A B, A_1 B_1, les valeurs de M sont respectivement P l et P x et les valeurs de E, $\frac{1}{6}$ b h^2 et $\frac{1}{6}$ b y^2.

Le corps devant offrir la même résistance dans toutes ses sections, σ doit conserver la même valeur pour tous les points compris entre A et C, et comme $M = \sigma E$, on doit avoir:

$$P\ l = \frac{\sigma}{6}\ b\ h^2, \qquad P\ x = \frac{\sigma}{6}\ b\ y^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

La première de ces équations détermine les dimensions de la section A B. En les divisant membre à membre, on obtient:

$$\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

équation d'une parabole dont le sommet est en C. Une pièce d'épaisseur constante, pour former un solide d'égale résistance, doit donc présenter un profil longitudinal parabolique.

Pour les pièces de grandes dimensions, en fonte, cette forme parabolique est très convenable, car elle s'obtient facilement au moulage et n'exige pas beaucoup de matière. Mais lorsque les pièces doivent être en bois ou en fer forgé, cette forme n'est plus aussi convenable; elle exigerait, en effet, beaucoup de travail et de plus, avec le bois, elle donnerait lieu à des déchets considérables. Il vaut donc mieux, pour ces matières, adopter des surfaces planes, se rapprochant le plus possible de la forme parabolique. On peut obtenir, par exemple, une de ces formes approchées de la manière suivante. Le point de la parabole situé à la distance $x = \frac{l}{4}$, a pour ordonnée, en vertu de l'équation (2), $y = \frac{h}{2}$.

Si donc nous prenons $CA_1 = \frac{CA}{4} = \frac{l}{4}$ et $A_1B_1 = \frac{AB}{2} = \frac{h}{2}$ (fig. 5, pl. V), B_1 sera un point de la parabole d'égale résistance. Si l'on joint B et B_1 par une ligne droite, qu'on prolonge cette ligne et qu'on mène C D parallèle à A B, on obtient un trapèze A C B D, dont la forme est très-approximativement celle du solide d'égale résistance. Du point A au point A_1 la forme parabolique présente une résistance un peu plus grande; c'est l'inverse qui a lieu du point A_1 au point C; en A B et A_1 B_1 les deux figures se confondent et offrent par suite la même résistance.

Deuxième exemple: hauteur constante, épaisseur variable. Si nous supposons que la hauteur reste constante et que l'épaisseur seule puisse varier (fig. 6, pl. V), nous aurons $P\,l = \frac{\sigma}{6}\,b\,h^2$, $P\,x = \frac{\sigma}{6}\,z\,h^2$. La première de ces équations détermine encore la section au point d'encastrement, et, en divisant les équations membre à membre, on a pour l'équation de la section faite hori-

zontalement $\frac{x}{l} = \frac{z}{b}$. On voit donc que, dans ce cas, la section horizontale est un triangle rectiligne.

Troisième exemple. Sections semblables. Si nous nous imposons la condition que toutes les sections du solide soient des rectangles semblables, nous aurons, en nous reportant à la fig. 7, pl. V:

$$P\, l = \frac{\sigma}{6}\, b\, h^2; \qquad P\, x = \frac{\sigma}{6}\, z\, y^2.$$

La première équation détermine encore la section au point d'encastrement. En divisant membre à membre, on obtient $\frac{l}{x} = \frac{b\, h^2}{z\, y^2}$ ou encore

$$\frac{l}{x} = \frac{h^3}{y^3}\,\frac{\frac{b}{h}}{\frac{z}{h}}$$

Mais comme, par hypothèse, toutes les sections doivent être des rectangles semblables, on a $\frac{b}{h} = \frac{z}{y}$, et l'équation précédente devient:

$$\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Comme d'ailleurs $\frac{b}{h} = \frac{z}{y}$ ou $\frac{z}{b} = \frac{z}{b}$, cette équation donne encore:

$$\frac{z}{b} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ces deux équations (1) et (2) représentent des paraboles du 3me degré, qui déterminent les profils que devrait présenter le corps dans les deux sections longitudinales, faites horizontalement et verticalement. Comme cette forme se prêterait mal à l'exécution, qu'elle exigerait beaucoup de travail, tout en donnant un aspect peu satisfaisant, on a intérêt, ici encore, à la remplacer par une forme approchée. Si dans les équations (1) et (2), on fait $\frac{x}{l} = \frac{1}{8}$, on trouve $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$, $\frac{z}{b} = \frac{1}{2}$.

Si donc, dans la fig. 8, pl. V, on prend $CA_1 = \frac{1}{8} CA$, $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$, $E_1F_1 = \frac{1}{2} EF$ et si l'on trace les trapèzes A C B D, E F G H, ces figures déterminent une forme approximative, facile à construire, qui présente une résistance à peu près constante en tous ses points et n'exige pas beaucoup plus de matière que la forme plus complexe limitée par les deux paraboles cubiques.

Quatrième exemple. Solides de révolution d'égale résistance. — Pour une surface de révolution (fig. 9, pl. V), on a:

$$\left.\begin{aligned} P\,l &= \frac{\sigma\pi}{32} d^3 \\ P\,x &= \frac{\sigma\pi}{32} y^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La première de ces équations donne $d = \sqrt[3]{\frac{32}{\sigma\pi} P\,l}$. En divisant membre à membre, on trouve:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

équation qui représente encore une parabole cubique et donne, par suite, une forme difficile à réaliser dans la pratique.

$$\text{Pour } \frac{x}{l} = \frac{1}{8} \text{ on a } \frac{y}{d} = \frac{1}{2}.$$

Si donc on construit un tronc de cône, (fig. 10, pl. V), qui, à la distance $\frac{1}{8}\,l$ de sa plus petite base, ait pour diamètre la moitié de celui de la grande, on obtient un solide dont la forme se rapproche beaucoup de la forme théorique d'égale résistance.

Solides d'égale résistance contre la flexion par compression.

Pour une tige soumise à une force, dirigée suivant son axe et tendant à la comprimer et à la fléchir, nous avons trouvé précédemment, pages 42 et 43:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{P \cos \varphi}{\Omega} - \frac{P}{E z} y \zeta \\ \frac{d^2 y}{d x^2} &+ \frac{P}{\varepsilon z E} y = o \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

formules dans lesquelles les notations conservent la signification indiquée page 41:

En représentant par Π la pression par unité de surface au point q (fig. 6 et 7, pl. IV), et en posant $m q = z_1$, la première de ces équations doit être satisfaite, quand on fait $p = \Pi$ et $\zeta = - z_1$. On doit donc avoir

$$\Pi = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} + \frac{P}{E} \frac{z_1}{z} y \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Si la flexion est très-faible, on peut remplacer $\cos \varphi$ par 1 et cette équation devient:

$$\Pi = \frac{P}{\Omega} + P \frac{z_1}{z} \frac{y}{E} \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Si d'autre part nous nous imposons la condition que le corps supporte, dans toutes ses sections, les mêmes efforts moléculaires, Π doit avoir une seule et même valeur pour tous les points de la ligne $B B_1 B_2$. Si, de plus, toutes les sections doivent être des figures semblables $\frac{z_1}{z}$ doit être constant pour toutes les sections. Or, d'après l'équation (3), pour que la valeur de Π soit constante, il faut que $\frac{y}{E}$ soit constant et égal à $\left(\Pi - \frac{P}{\Omega}\right) \frac{z}{z_1}$ pour toutes les sections.

Posons :

$$\frac{1}{P} \left(\Pi - \frac{P}{\Omega}\right) \frac{z}{z_1} = \frac{y}{E} = k \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

la seconde des équations (1) devient alors:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{P k}{\varepsilon z} \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Mais, dans cette équation, pour le cas que nous considérons, z est une fonction de x; comme nous avons supposé que toutes les sections devaient être semblabes, nous pouvons donner à E la forme

$$E = m z^3 \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

m étant une quantité indépendante de la grandeur de la section, c'est-à-dire constante pour toutes les sections de la pièce. Nous avons donc, en vertu de l'équation (4):

$$y = k\ E = k\ m\ z^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Si nous connaissions l'équation de la ligne d'axe, nous pourrions, à l'aide de cette formule, déterminer le profil longitudinal de la pièce. Mais l'équation de la ligne d'axe est encore inconnue et elle dépend elle-même de la forme de ce profil. Nous devons donc chercher à déterminer directement ces deux lignes, ce qui peut se faire de la manière suivante: en différentiant l'équation (7), on a:

$$d\ y = k\ m\ 3\ z^2\ d\ z, \quad d^2\ y = 3\ k\ m\ (z^2\ d^2\ z + 2\ z\ d\ z^2),$$

Cette valeur de $d^2\ y$ introduite dans l'équation (5), donne:

$$3\ k\ m\ \frac{z^2\ d^2\ z + 2\ z\ d\ z^2}{d\ x^2} = -\ \frac{P\ k}{E\ z}$$

ou:

$$z^3\ \frac{d^2\ z}{d\ x^2} + 2\ z^2 \left(\frac{d\ z}{d\ x}\right)^2 = -\ \frac{P}{3\ m\ \varepsilon}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{P}{3\ m\ \varepsilon} = \lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

l'équation précédente devient:

$$z^3\ \frac{d^2\ z}{d\ x^2} + 2\ z^2 \left(\frac{d\ z}{d\ x}\right)^2 = -\ \lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

L'intégrale de cette équation donne la forme du profil de la pièce d'égale résistance.

Posons, pour intégrer,

$$\left(\frac{d\ z}{d\ x}\right)^2 = u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

on en tire:

$$\frac{d^2\ z}{d\ x^2} = \frac{1}{2}\ \frac{d\ u}{d\ z}$$

l'équation (9) devient alors:

$$\frac{1}{2} z^3 \frac{d u}{d z} + 2 z^2 u = - \lambda^2$$

ou

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{z^2 d u}{\lambda^2 + 2 u z^2} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Si l'on pose encore:

$$\lambda^2 + 2 u z^2 = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

d'où

$$d v = 2 z^2 d u + 4 u z d z, \quad z^2 d u = \frac{d v - 4 u z d z}{2}$$

l'équation (11) devient:

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{d v - 4 u z d z}{2 v} = o$$

ou, en remplaçant u par sa valeur tirée de l'équation (12) et après quelques réductions simples:

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{d v}{v + \lambda^2} = o$$

dont l'intégrale est

$$\text{log. nat. } z + \text{log. nat. } (v + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \text{Const.}$$

ou

$$z = \frac{A}{(v + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

A représentant la constante d'intégration.

En remplaçant v par sa valeur, tirée de l'équation (12), la formule précédente devient:

$$z^2 = \frac{A^2}{2 (\lambda^2 + u z^2)}$$

d'où on tire:

$$u = \frac{1}{z^4} \left(\frac{A^2}{2} - \lambda^2 z^2 \right)$$

ou, en vertu de l'équation (10),

$$\frac{d z}{d x} = \frac{\sqrt{\frac{A^2}{2} - \lambda^2 z^2}}{z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Si l'on désigne par 2 l la longueur totale de la tige, par r la valeur de z pour x = l, on a. pour $z = r$, $\frac{d z}{d x} = o$

et, par suite:

$$\sqrt{\frac{A^2}{2} - \lambda^2 r^2} = o, \text{ ou } \frac{A^2}{2} = \lambda^2 r^2$$

Donc

$$\frac{dz}{dx} = \lambda \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{z^2}, \text{ ou } dx = \frac{1}{\lambda} \frac{z^2 \, dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

L'intégrale de cette équation est

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{z\sqrt{r^2 - z^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \text{ Arc sin } \frac{z}{r}\right) + \text{Const.}$$

Comme pour $x = o$, $z = o$, la constante est nulle, et l'on a simplement:

$$x = \frac{r^2}{2\lambda}\left[\text{Arc sin } \frac{z}{r} - \frac{z}{r}\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

pour $x = l$, $z = r$, donc

$$l = \frac{r^2}{2\lambda}\left[\text{Arc sin. } 1\right] = \frac{r^2}{2\lambda}\frac{\pi}{2} = \frac{r^2}{4}\frac{\pi}{\lambda} \quad . \; . \; . \; . \quad (16)$$

En divisant les deux équations (15) et (16) membre à membre, on obtient:

$$\frac{x}{l} = \frac{2}{\pi}\left[\text{Arc sin } \frac{z}{r} - \frac{z}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}\right] \quad . \; . \; . \quad (17)$$

L'équation (16) donne enfin, si l'on remplace λ par sa valeur tirée de (8):

$$16\, l^2 \frac{P}{3\, m\, \varepsilon} = r^4 \pi^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Si l'on désigne par E_1 la valeur de E qui correspond à la section moyenne de la tige, on a, en vertu de l'équation (6), $m = \frac{E_1}{r^2}$; par conséquent, d'après la formule (18),

$$P = \frac{3}{16}\pi^2 \varepsilon \frac{r E_1}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Cette équation détermine la capacité de résistance de la tige, ou donne, en fonction de P, supposé connu, la section moyenne de la tige. Pour une pièce à section circulaire, on a:

$$E_1 = \frac{\pi}{32}(2\, r)^3 = \frac{\pi\, r^3}{4}$$

et l'on trouve alors:

$$P = \frac{3}{64} \pi^3 \varepsilon \frac{r^4}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Si on désigne par d le diamètre au milieu de la tige, par $L = 2\,l$ sa longueur, on a:

$$P = \frac{3}{4} \frac{\pi^3}{64} \varepsilon \frac{d^4}{L^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

En comparant cette valeur de P avec celle que l'on a trouvée précédemment pour une tige cylindrique, on voit que la charge que peut supporter la tige d'égale résistance est égale aux $^3/_4$ de celle qui correspondrait à une pièce cylindrique de même épaisseur.

L'équation (7) donne $z = \sqrt[3]{\frac{y}{k\,m}}$. En portant cette valeur de z dans l'équation (17), on obtient une relation entre x et y, qui est précisément l'équation de la fibre d'axe après la déformation.

L'équation (17) donne:

pour $\frac{z}{r} =$	0·75	0·50	0·25
$\frac{x}{l} =$	0·224	0·058	0·0106

On voit par là qu'on obtient une forme, à très-peu près d'égale résistance, si l'on donne aux extrémités de la pièce des sections semblables à la section moyenne, mais dont les dimensions linéaires ne soient que la moitié de celles de la section moyenne, et si on réunit par des lignes droites les points des sections extrêmes, ainsi déterminés, avec ceux de la section moyenne. On a effectivement pour $\frac{z}{r} = 0{\cdot}5$, $\frac{x}{l} = 0{\cdot}058$, c'est-à-dire que x est sensiblement nul.

Equivalence des sections.

Deux sections sont dites équivalentes quand, placées dans les mêmes conditions, elles présentent la même résistance.

Au point de vue de la résistance absolue, c'est-à-dire de la résistance à la rupture par extension, toutes les sections de même surface sont équivalentes.

Au point de vue de la résistance à la rupture par flexion, deux sections sont équivalentes, lorsqu'elles donnent des valeurs égales pour la fonction E, définie précédemment.

Une section rectangulaire et une section circulaire sont donc équivalentes, au point de vue de la rupture par flexion, quand on a:

$$\frac{1}{6} b h^2 = \frac{\pi}{32} d^3.$$

D'où on tire:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32} 6 \left(\frac{b}{h}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour donner un exemple de l'application de cette formule, supposons qu'à un cylindre de 10 centimètres de diamètre, on veuille substituer un rectangle, dont la hauteur h soit double de la largeur b. On a alors $d = 10$, $\frac{b}{h} = 2$ et l'équation (1) donne:

$$\frac{h}{d} = 1{\cdot}056, \text{ d'où } h = 10{\cdot}56 \text{ et } b = \frac{10{\cdot}56}{2} = 5{\cdot}28.$$

Deux sections, l'une circulaire, l'autre elliptique ont la même résistance relative, lorsqu'on a:

$$\frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} b h^2$$

h représentant l'axe de l'ellipse qui est parallèle à la force fléchissante.

La charge Q que peut supporter une tige comprimée verticalement est:

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2}$$

Deux pièces, formées de la même matière et de même longueur, présenteront donc la même sécurité pour un effort de cette nature, si la valeur de E z est la même pour toutes les deux, c'est-à-dire si les moments d'inertie de leurs sections ont des valeurs égales.

Ainsi, pour que deux tiges, l'une à section circulaire, l'autre à section rectangulaire, présentent la même résistance à la rupture par compression, on doit avoir:

$$\frac{\pi}{32} d^3 \frac{d}{2} = \frac{1}{6} b h^2 \frac{h}{2}.$$

h désignant la plus petite des dimensions du rectangle. De cette équation on tire:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{32}\, 6 \left(\frac{h}{b}\right)}$$

Un cercle et une ellipse seront de même équivalents, si on a:

$$\frac{\pi}{32}\, d^3\, \frac{d}{2} = \frac{\pi}{32}\, b\, h^3\, \frac{h}{2}$$

d'où $\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{h}{b}}$, b désignant le plus petit axe de l'ellipse.

Cas le plus général de l'équilibre d'une pièce naturellement courbe.

Considérons maintenant le cas le plus général de l'équilibre d'une pièce naturellement courbe. A cet effet nous supposerons: 1°, que la ligne d'axe de la pièce, à l'état naturel, soit une ligne à double courbure, 2°, que les forces extérieures, agissant sur la pièce, soient en nombre quelconque et soient appliquées en des points quelconques.

Soient A M B (fig. 1, pl. VI), une partie de la ligne d'axe à l'état naturel, M, N, P trois points de cette ligne, infiniment voisins. Si nous imaginons que, par ces trois points, on fasse passer un plan F, ce sera précisément le plan de courbure de l'élément d'arc M N P. Par les points M et N, menons les plans normaux E, E_1, c'est-à-dire les plans perpendiculaires en M et N aux tangentes à la ligne d'axe; ces plans se coupent suivant une ligne H O K, perpendiculaire au plan de courbure, et le point de rencontre O de cette ligne avec le plan de courbure détermine le centre de courbure de l'arc M N. Soit $\rho_0 = $ O M $=$ O N, le rayon de courbure correspondant.

La fig. 2, pl. VI, représente la section de la pièce par le plan E normal en M; O M z est la ligne suivant laquelle le plan E de cette section est coupé par le plan de courbure F; M x est une ligne perpendiculaire sur M z, et par conséquent parallèle à l'intersection H O K des plans E et E_1, normaux en M et en N.

Nous admettrons en outre que, dans les déformations dues à l'action des forces extérieures, les positions relatives des molé-

cules d'une même section ne se trouvent pas modifiées; toutes les molécules qui, à l'état naturel, se trouvaient dans le plan normal en M, se trouveront donc encore, par hypothèse, après la déformation, dans un même plan que l'on détermine en menant, par le même point M, un plan normal à l'élément d'axe déformé.

Enfin, comme dernière hypothèse, nous admettrons encore que, sous l'action des forces extérieures, la fibre d'axe n'éprouve ni allongement, ni raccourcissement, et que, pour les sections faites par les points M et N, il ne se produise pas de torsion, mais simplement une flexion, en vertu de laquelle l'intersection primitive H O K des plans normaux vient prendre la position H_1 O_1 K_1; la ligne z_1 M O_1, perpendiculaire sur cette direction, représente alors l'intersection du plan de courbure de l'élément d'axe déformé avec le plan normal E passant par la molécule M. Menons M x_1 perpendiculaire à M z_1, désignons par β l'angle x M x_1, par $\xi =$ M p, $\zeta =$ m p, $\xi_1 =$ M p_1, $\zeta_1 =$ m p_1 les coordonnées d'un point quelconque m de la section normale, passant par le point M. Soient ϱ le rayon de courbure de l'élément d'axe M N, après la déformation, d φ l'angle que font, après la flexion, les plans normaux passant par les points M et N, enfin d s_0 la longueur initiale de l'élément de fibre M N et ϱ_0 son rayon de courbure.

Ces notations établies, on a, pour la longueur primitive de l'élément de fibre, passant par le point m, et compris entre les plans normaux,

$$d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

la longueur du même élément, après la flexion, est de même

$$d'\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta_1}{\varrho}\right)$$

L'allongement éprouvé par l'élément de fibre, en vertu de la flexion, est, par suite,

$$d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta_1}{\varrho}\right) - d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) = d\, s_0 \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

Si nous désignons par σ la tension, par unité de surface, déterminée par cet allongement dans l'élément de fibre, dont la longueur initiale était

$$d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

la loi établie primitivement pour l'extension des prismes donne la relation:

$$d\,s_0\left(\frac{\zeta_1}{\rho}-\frac{\zeta}{\rho_0}\right)=d\,s_0\left(1+\frac{\zeta}{\rho_0}\right)\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Dans tous les cas qu'on rencontre dans la pratique, la section des pièces a généralement des dimensions très-petites par rapport au rayon de courbure, on peut donc, sans erreur sensible, négliger $\frac{\zeta}{\rho_0}$ par rapport à l'unité et l'expression précédente devient alors:

$$\sigma=\varepsilon\left(\frac{\zeta_1}{\rho}-\frac{\zeta}{\rho_0}\right)\quad \ldots\ldots\ldots\quad (1)$$

Dans tout ce qui précéde nous avons supposé que les forces extérieures produisaient simplement une flexion, et qu'elles ne faisaient pas varier la longueur de l'élément M N de la fibre d'axe. Dans le cas où cet effet d'allongement se produit, en désignant par S l'intensité de la force de traction, la tension, par unité de surface, sur l'élément de fibre m, devient:

$$\sigma=S+\varepsilon\left(\frac{\zeta_1}{\rho}-\frac{\zeta}{\rho_0}\right)\quad \ldots\ldots\ldots\quad (2)$$

D'un autre côté, entre les coordonnées ζ, ξ, ζ_1, ξ_1, on a les relations:

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1&=\zeta\cos\beta+\xi\sin\beta\\ \xi_1&=\xi\cos\beta-\zeta\sin\beta\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ldots\quad (3)$$

Si on porte la valeur de ζ_1 dans l'équation (2), on trouve:

$$\sigma=S+\varepsilon\left(\frac{\zeta\cos\beta+\xi\sin\beta}{\rho}-\frac{\zeta}{\rho_0}\right)$$

ou

$$\sigma=S+\varepsilon\left[\zeta\left(\frac{\cos\beta}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)+\xi\,\frac{\sin\beta}{\rho}\right]\quad \ldots\ldots\quad (4)$$

En désignant par d f la section infiniment petite de l'élément de fibre qui passe en m, $\int\sigma\,d\,f$ représente la somme de toutes les tensions élémentaires et $\int\sigma\,\xi\,d\,f$, $\int\sigma\,\zeta\,d\,f$ les sommes des moments de toutes ces tensions par rapport aux axes M x et M z; on a:

$$\int \sigma \, df = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) + \xi \frac{\sin \beta}{\varrho} \right] \right\} df.$$

$$\int \sigma \xi \, df = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) + \xi \frac{\sin \beta}{\varrho} \right] \right\} \xi \, df.$$

$$\int \sigma \zeta \, df = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) + \xi \frac{\sin \beta}{\varrho} \right] \right\} \zeta \, df.$$

Dans ces expressions ζ et ξ sont les seules variables; de plus, nous avons supposé que M était le centre de gravité de la section; si donc on désigne par Ω cette section et si on pose, pour abréger:

$$\left. \begin{aligned} &\int \zeta^2 \, df = I_\zeta \\ &\int \xi^2 \, df = I_\xi \\ &\int \zeta \xi \, df = I_{\zeta\xi} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

les intégrales précédentes deviennent:

$$\left. \begin{aligned} &\int \sigma \, df = S \, \Omega \\ &\int \sigma \, \xi \, df = \varepsilon \left[\left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) I_{\zeta\xi} + \frac{\sin \beta}{\varrho} I_\xi \right] \\ &\int \sigma \, \zeta \, df = \varepsilon \left[\left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) I_\zeta + \frac{\sin \beta}{\varrho} I_{\zeta\xi} \right] \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Décomposons maintenant chacune des forces extérieures, qui agissent sur la pièce, depuis la section M jusqu'à l'extremité B, en trois composantes rectangulaires X, Y, Z, les deux composantes X et Z étant parallèles aux axes M x et M z et la troisième Y parallèle à la tangente, menée en M à l'élément de la fibre d'axe. Soient, en outre, x, y, z les coordonnées du point d'application d'une de ces forces; Σ (Y z — Z y), Σ (Y x — X y) représentent les sommes des moments de ces forces extérieures par rapport aux axes M x et M z, ces moments étant comptés de telle sorte qu'ils tendent à déterminer un allongement en m; enfin Σ (X z — Z x) est la somme des moments des mêmes forces par rapport à l'axe M y.

Si l'extrémité B de la pièce, au lieu d'être libre, était encastrée ou soumise à une tension, ou pourrait conserver encore

la même marche, à la condition toutefois de supposer appliquées à cette extrémité certaines forces X_1, Y_1, Z_1 et des moments M x, M y, M z, les forces étant prises parallèlement aux axes et les moments rapportés à des parallèles à ces axes, menées par le centre de gravité de la section extrême. Cette remarque faite, pour arriver à établir les équations d'équilibre de la partie de pièce considérée, nous avons encore à tenir compte de la torsion de la tige. Par suite de cette torsion, l'élément de fibre en m, compris entre les plans normaux E et E_1, éprouve un petit allongement et sa direction se trouve inclinée sur le plan normal E. Mais, si nous supposons tous les changements de forme très-petits, l'influence de la torsion sur la tension σ sera négligeable et on pourra, dès lors, faire encore usage des expressions (6). Toutefois les forces de glissement, résultant de la torsion, doivent entrer dans le calcul; ce sont ces forces qui font équilibre aux actions extérieures tendant à produire une rotation autour de l'axe M y.

En désignant par I_y le moment d'inertie de la section de la pièce par rapport à l'axe y, par G le module d'élasticité de torsion, par d Θ l'angle dont le plan normal E_1 a tourné par rapport au plan normal E, on a, en vertu de l'équation (11) de la théorie de la torsion, page 59:

$$G\, I_y \frac{d\,\Theta}{d\,s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

pour le moment de torsion correspondant à toutes les forces de glissement qui s'exercent dans la section.

Comme d'ailleurs les actions moléculaires, développées dans la section E, doivent faire équilibre à toutes les forces extérieures, qui agissent sur la partie de la pièce comprise entre le point M et l'extrémité B, on a les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\, Y = \Omega\, S \\
&\Sigma\,(Y z - Z y) = \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) I_\zeta + \frac{\sin\beta}{\varrho}\, I_{\zeta\xi}\right] \\
&\Sigma\,(Y x - X y) = \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) I_{\zeta\xi} + \frac{\sin\beta}{\varrho}\, I_\xi\right] \\
&\Sigma\,(X z - Z x) = G\, I_y \frac{d\,\Theta}{d\,s}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (8)$$

Sous les signes Σ se trouvent d'ailleurs compris les forces X_1, Y_1, Z_1 et les moments Mx, My, Mz, qui sont à ajouter aux forces extérieures proprement dites, lorsque l'extrémité de la pièce n'est pas libre.

La première des équations (8) donne la tension de l'élément M N de la fibre d'axe; la seconde et la troisième déterminent l'angle β et le rayon de courbure ϱ.

Ces deux dernières quantités une fois connues, l'équation (4) permet de calculer la tension σ en un point quelconque de la section M. Enfin la quatrième équation détermine l'angle de torsion.

Pour trouver la forme de la fibre d'axe, après la déformation, il faut introduire l'expression différentielle du rayon de courbure; ce qui conduit souvent à des calculs très-pénibles; dans certains cas, les équations (8) fournissent directement la solution de la question. Avant d'aborder les applications, nous allons chercher à étudier encore plusieurs points du problème.

Si, dans l'équation (4), on considère σ comme une constante, cette équation est du premier degré par rapport à ξ et ζ. Il en résulte que, dans une même section, tous les points pour lesquels la tension a la même valeur, se trouvent sur une ligne droite; α désignant l'angle $x\,M\,x_3$, que fait avec M x une droite, menée par le point M, parallèlement à la direction de ces lignes d'égale tension, on a

$$\text{tang.}\,(\pi - \alpha) = -\frac{\dfrac{\sin\beta}{\varrho}}{\dfrac{\cos\beta}{\varrho} - \dfrac{1}{\varrho_0}} = -\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \dfrac{\varrho}{\varrho_0}}$$

Ou

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - \dfrac{\varrho}{\varrho_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Cherchons maintenant à déterminer, dans le plan de la section normale, c'est-à-dire dans le plan des $x\,z$, une ligne telle que les moments statiques des forces extérieures, par rapport à cette ligne, donnent une somme nulle. Soit γ l'angle de cette ligne avec l'axe M z; par le point M traçons un système d'axes de coordonnées $M\,x_2$, $M\,y_2$, $M\,z_2$, tels que $M\,y_2$ coïncide avec M y et $M\,z_2$ avec la ligne précédente, qui fait avec M z l'angle γ.

Pour déterminer les coordonnées x_2, y_2, z_2 d'un point quelconque, dans ce nouveau système d'axes, on aura les relations:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x \cos \gamma - z \sin \gamma \\ y_2 = y \\ z_2 = z \cos \gamma + x \sin \gamma \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Les composantes des forces, désignées par X, Y, Z, deviendront par rapport aux nouveaux axes:

$$\left.\begin{array}{l} X_2 = X \cos \gamma - Z \sin \gamma \\ Y_2 = Y \\ Z_2 = Z \cos \gamma + X \sin \gamma \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

La somme des moments par rapport à l'axe O z_2 sera, par suite,

$$\Sigma (Y_2 x_2 - X_2 y_2) = \Sigma [Y (x \cos \gamma - z \sin \gamma) - (X \cos \gamma - Z \sin \gamma) y]$$

Ou

$$\Sigma (Y_2 x_2 - X_2 y_2) = \cos \gamma \, \Sigma (Y x - X y) - \sin \gamma \, \Sigma (Y z - Z y).$$

Cette somme s'annulle pour

$$\text{tang.}\, \gamma = \frac{\Sigma (Y x - X y)}{\Sigma (Y z - Z y)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Or, en vertu de la 2ème et de la 3ème des équations (8), on a aussi:

$$\frac{\Sigma (Y x - X y)}{\Sigma (Y z - Z y)} = \frac{\left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) I_{\zeta\xi} + \frac{\sin \beta}{\varrho} I_{\xi}}{\left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) I_{\zeta} + \frac{\sin \beta}{\varrho} I_{\zeta\xi}}$$

Et, en tenant compte de l'équation (9),

$$\frac{\Sigma (Y x - X y)}{\Sigma (Y x - Z y)} = \frac{I_{\zeta\xi} + \text{tang.}\, \alpha \, I_{\zeta}}{I_{\zeta} + \text{tang.}\, \alpha \, I_{\zeta\xi}} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Des équations (12) et (13) on tire:

$$\text{tang.}\, \gamma = \frac{I_{\zeta\xi} + \text{tang.}\, \alpha \, I_{\xi}}{I_{\zeta} + \text{tang.}\, \alpha \, I_{\zeta\xi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Si la section a une forme telle qu'elle puisse être partagée en huit parties symétriques par des plans inclinés à 45°, et si de plus la courbure initiale de la pièce est telle que le plan de

courbure coïncide avec un des axes principaux de la section, on a $I_{\zeta\xi} = o$ et $I_{\zeta} = I_{\xi}$ et par suite, en vertu de l'équation (14).

$$\text{tang. } \gamma = \text{tang. } \alpha$$

c'est-à-dire que, dans ce cas particulier, la ligne par rapport à laquelle la somme des moments des forces extérieures devient nulle, est perpendiculaire à la direction des lignes d'égale tension.

Coefficients de résistance et d'élasticité des matériaux.

Le tableau suivant contient les coefficients de résistance et d'élasticité pour les principaux matériaux employés dans la construction des machines.

Colonne A. Coefficients de rupture par extension, par centimètre carré

Colonne B. Coefficients de rupture par flexion, par centimètre carré.

Colonne T. Coefficients de rupture par torsion, par centimètre carré.

Colonne ε. Modules d'élasticité longitudinale pour le calcul de l'extension, de la compression et de la flexion des corps.

Colonne G. Modules d'élasticité transversale pour le calcul de la torsion des corps.

Colonne $\frac{A^2}{\varepsilon}$. Coefficients pour le calcul du travail, capable de produire la rupture par extension.

Colonne $\frac{B^2}{\varepsilon}$. Coefficients pour le calcul du travail, capable de produire la rupture par flexion.

Colonne $\frac{T^2}{G}$. Coefficients pour le calcul du travail, capable de produire la rupture par torsion.

Ces coefficients représentent tous les valeurs moyennes de nombreux résultats d'expériences sur la résistance des matériaux.

Tableau des coefficients de résistance et d'élasticité de matériaux.

Désignations des matériaux.	A	B	T	ε	G	$\frac{A^2}{\varepsilon}$	$\frac{B^2}{\varepsilon}$	$\frac{T^2}{G}$
Bois de chêne .	720	700	280	120000	48000	4·3	4	1·6
Bois d'érable . .	1195	900	478	112000	44800	13	7·2	5·1
Bois de sapin . .	854	600	240	100000	40000	7·2	3·6	1·44
Bois de bêtre . .	803	720	321	93000	37000	6·9	5·6	2·8
Fer forgé (petites dimensions) . .	4350	7000	7000	2500000	1000000	7·4	20	47
Fer forgé (grandes dimensions)	3300	4000	4500	1500000	600000	7·2	10·6	33·7
Fil de fer	7000	—	—	1800000	720000	27	—	—
Fonte	1000 / 1300	3000	3000	1000000	400000	1·0 / 1·7	9	22·5
Acier fondu . . .	10000	16000	10000	2000000	960000	40	128	104
Acier (qualité moyenne) . . .	7500	—	7500	3000000	1200000	18	—	46·8
Acier (qualité ordinaire) . . .	3600	—	3600	2000000	800000	6	—	16
Métal de canon (Bronze) . . .	2600	—	2300	700000	360000	10	—	14·7
Cuivre battu . .	2500	—	—	1310000	—	5	—	—
Cuivre fondu . .	1300	—	2000	—	—	—	—	—
Laiton	1300	2270	2100	645000	258000	2·6	7·9	17·1
Etain	333	—	658	320000	—	—	—	—
Plomb	128	—	458	540000	—	0·03	—	—
Zinc	199	—	—	—	—	—	—	—
Verre	248	—	—	9000	—	7·0	—	—
Cuir de veau . .	129	—	—	391	—	43	—	—
Cuir de mouton	110	—	—	381	—	32	—	—
Cuir (blanc) de cheval	272	—	—	748	—	99	—	—
Cuir de cheval (mince)	218	—	—	476	—	100	—	—
Cuir de cordoue	114	—	—	252	—	51	—	—
Cuir de vache .	271	—	—	683	—	108	—	—
Cordes de chanvre	510	—	—	—	—	—	—	—

Résultats d'expériences sur la limite d'élasticité.

Notations:

A coefficient de résistance contre la rupture par extension,
R " " " " " " " compression,
A_1 la tension par centimètre carré, à la limite d'élasticité de l'extension,
R_1 la pression par centimètre carré, à la limite d'élasticité de la compression,
a_1 l'extension linéaire d'une tige à la limite d'élasticité,
r_1 la compression linéaire d'une tige à la limite d'élasticité.

Matériaux.	$\frac{R}{A}$	$\frac{A_1}{A}$	$\frac{R_1}{A}$	a_1	r_1
Fer forgé	$\frac{4}{5}$	0·4	0·4	$\frac{1}{1250}$	$\frac{1}{1250}$
Tole	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1222}$	$\frac{1}{1222}$
Fil de fer	$\frac{4}{5}$	0·4	0·4	$\frac{1}{843}$	$\frac{1}{843}$
Fonte	5·5	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{1562}$	$\frac{1}{521}$
Bois de sapin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{666}$
Bois de pin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{536}$	$\frac{1}{714}$
Bois de sapin blanc . . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{444}$	$\frac{1}{592}$
Bois de mélèze	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{533}$
Bois de chêne	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{469}$	$\frac{1}{563}$

DEUXIÈME SECTION.

Construction des pièces de machines

(unités de longueur et de poids, le centimètre et le kilogramme).

Principes généraux. — Lorsqu'on a arrêté la disposition générale d'une machine et de ses principaux organes, on connait par cela même les relations géométriques qui doivent exister entre ces organes et, de plus, les conditions auxquelles doit satisfaire un quelconque d'entre eux, c'est-à-dire sa forme générale, sa grandeur, abstraction faite des dimensions de sa section, l'effet qu'il doit produire ou transmettre, sa vitesse et enfin les efforts auxquels il doit résister. En un mot la disposition générale d'une machine fournit au constructeur toutes les données qui lui sont indispensables pour déterminer la forme et les dimensions de chaque pièce, ainsi que la nature des matériaux qu'il convient d'employer.

Avant d'aborder spécialement l'étude de la construction des pièces de machines, nous devons commencer par exposer les principes généraux qui nous serviront de guides dans cette étude.

Les conditions auxquelles doit satisfaire un organe de machine sont, en général, les suivantes:

1° **Résistance suffisante.** Il est évident d'abord que toute pièce doit être assez forte, pour ne pas se rompre sous l'action des forces extérieures, mais cette condition n'est pas suffisante; il faut de plus que, sous l'action de ces forces, la forme qu'elle possède à l'état naturel ne soit pas sensiblement modifiée, puisque ce n'est qu'à cette condition qu'il est possible de réaliser, au

moins approximativement, les relations géométriques auxquelles doivent satisfaire les différentes pièces, d'après la disposition générale de la machine.

2° **Usure faible.** La compression mutuelle et le mouvement relatif de deux pièces qui se touchent donnent lieu à des frottements; les parties en contact finissent par perdre, au bout d'un certain temps, leurs formes et leurs dimensions primitives et arrivent ainsi à ne plus remplir qu'imparfaitement le but pour lequel elles ont été établies; on comprend dès-lors tout l'intérêt que présentent, dans la construction des machines, les précautions qui sont de nature à diminuer l'usure le plus possible.

3° **Faible résistance de frottement.** Cette condition a une grande importance, lorqu'on veut arriver à un emploi extrêmement économique du moteur. Dans tous les autres cas il suffit de s'attacher à ce que la résistance, due au frottement, ne devienne pas trop considérable et ne dépasse pas certaines limites, déterminées par les autres conditions qu'il peut y avoir intérêt à réaliser.

4° **Economie de matière.** La plupart des pièces de machines sont composées de fer, de bronze et d'acier, dont le prix est relativement élevé; il est, par suite, d'une très-grande importance de déterminer la forme et les éléments qui influent sur la quantité de matière, de manière à obtenir des pièces présentant une résistance suffisante, avec la moindre dépense de métal possible.

5° **Exécution facile.** Les frais de main d'œuvre sont ordinairement, de cinq à dix fois, plus élevés que le prix de la matière employée; on doit donc éviter avec le plus grand soin, dans la construction des pièces, tout ce qui, sans offrir d'avantages sérieux, est de nature à rendre l'exécution plus difficile. Dans les conditions actuelles des usines de construction, toute complication dans l'exécution n'est admissible que lorsqu'elle correspond à un résultat d'une certaine importance.

6° **Montage facile.** Une autre question, dont il importe de tenir grand compte dans la construction, est celle du montage. Une machine, dont la disposition peut d'ailleurs être très-convenable et les organes d'une exécution très-soignée, peut cependant ne pas donner de résultats satisfaisants, si l'on commet des erreurs dans le montage. Comme ces erreurs ont d'autant plus de chances de se produire qu'il est moins facile de fixer chacune des pièces dans sa position, avec une exactitude suffisante, il en

résulte qu'on doit s'efforcer d'éviter toute disposition qui serait de nature à augmenter les difficultés du montage.

7° **Modèles peu nombreux.** Les modèles, qu'il faut nécessairement établir pour obtenir les pièces de fonte, donnent lieu à des dépenses considérables; pour ce motif, dans chaque usine de construction, on doit chercher à utiliser le plus possible les modèles qu'on possède déja, et réduire, par suite, au minimum le nombre des modèles neufs à établir.

Il est facile de comprendre qu'on ne peut, que bien rarement, satisfaire en même temps à toutes les conditions que nous venons d'énumérer; quelques unes sont contradictoires et de plus telle d'entre elles, dont la réalisation peut être avantageuse à un certain point de vue, peut ne pas l'être à un autre. Il en résulte que la recherche des dispositions les plus convenables à adopter, c'est-à-dire celles pour lesquelles la somme des inconvénients est la plus faible possible et la somme des avantages, au contraire, la plus grande possible, présente, en général, d'assez grandes difficultés et qu'on ne peut, le plus souvent, arriver à un résultat satisfaisant que par un examen approfondi d'un certain nombre de machines, établies pour un but analogue à celui que doit remplir celle qu'on étudie. Toutefois, dans la plupart des cas, le problème se trouve notablement simplifié, lorsqu'on connait la forme et les dimensions qu'il convient de donner à chaque pièce, pour satisfaire aux conditions de résistance. La détermination de ces éléments présente donc un grand intérêt et nous allons rechercher, dans ce qui va suivre, quelle est la méthode qu'il convient d'employer pour arriver à des résultats satisfaisants.

Détermination de la force des pièces de machines.

Les dimensions de la section d'une pièce dépendent, en partie de sa grandeur principale et de sa forme, en partie des intensités et du mode de distribution des forces auxquelles elle est soumise: la forme générale de la pièce, sa longueur et le mode de distribution des forces sont toujours connus par les relations géométriques; les intensités des forces sont quelquefois aussi données directement; toutefois, dans la plupart des cas, on ne connait, en réalité, que le travail que doivent développer ces forces et la vitesse du mouvement du point d'application de chacune d'elles; on a dès-lors à calculer les intensités en fonction de ces deux éléments; ce calcul très-simple revient à diviser le

travail (exprimé en kilogrammètres) par la projection de la vitesse (exprimée en mètres) du point d'application sur la direction de la force. Si, par exemple, une roue d'engrenages, de 1m20 de rayon, fait 40 tours par minute et doit transmettre un travail de 20 chevaux, la vitesse de cette roue, à la circonférence, est $\frac{2\pi \times 1{\cdot}2 \times 40}{60} = 5$ mètres environ; la pression que les dents ont à supporter est, par suite, $\frac{20 \times 75}{5} = 300$ kilogrammes.

Comme théoriquement la force à donner aux pièces dépend des intensités des forces mais nullement du travail qu'elles développent et, comme d'ailleurs, pour un même travail, les intensités sont inversement proportionnelles aux vitesses, il en résulte cette conclusion importante, que les pièces de machines à mouvement rapide n'exigent, pour la transmission d'un certain travail, que des dimensions relativement faibles par rapport à celles qu'il faut donner aux pièces de machines à mouvement lent.

L'observation de cette règle, dans l'établissement des transmissions de mouvement, peut souvent donner une économie de matière bien supérieure à celle que permettent de réaliser tous ces petits perfectionnements, dans lesquels certains constructeurs placent tout leur espoir.

Nous devons ajouter d'ailleurs que cette règle est depuis longtemps parfaitement connue de la plupart des constructeurs et que son application, faite avec intelligence, a conduit aux meilleurs résultats.

Pour la détermination des dimensions des pièces, il est d'une importance spéciale de connaitre à quelle fraction de la résistance absolue il convient de faire travailler la matière. A ce point de vue, le plus grand nombre des théoriciens faisant autorité avaient posé comme règle, sans tenir compte de ce qui a réellement lieu dans la pratique, qu'un coefficient de sécurité, compris entre 3 et 5, était en général suffisant. Il est facile de reconnaitre qne cette régle n'est presque jamais suivie; si, en effet, on examine, dans les machines existantes, les pièces qu'on s'accorde à regarder comme ayant des dimensions très convenables, on trouve qu'elles correspondent, en général, à des coefficients de sécurité bien supérieurs à ceux que nous venons d'indiquer. Afin d'arriver à des règles positives pour la détermination de la force des pièces, j'ai étudié séparément, dans toutes les variétés de machines, les différents organes au point de vue de leur résistance. Cette étude m'a montré que, dans certaines pièces, telles que les chaines

et les cables, la matière peut, à la vérité, travailler au cinquième et même au tiers de la charge de rupture, mais que, pour toutes les autres pièces, le coefficient de sécurité ne se trouve jamais inférieur à dix. En réalité, pour les pièces exposées à la rupture par extension, le coefficient de sécurité varie de 10 à 50, tandis que pour celles qui sont exposées à la torsion, il se trouve généralement compris entre 30 et 50. — Si l'on veut bien remarquer que les pièces de machines ont à résister, non seulement aux forces qui agissent dans les circonstances normales, mais encore à celles qui peuvent être dues à des causes accidentelles, que de plus il est très-important qu'il ne se produise dans ces pièces que des vibrations et des déformations insensibles, on arrive assez facilement à admettre que ces coefficients, constatés pour des machines, dont la construction était regardée comme satisfaisante, ne sont pas, en réalité, aussi exagérés qu'ils peuvent le paraître au premier abord. — La conclusion à tirer de nos observations pour la détermination de la force des pièces, c'est qu'il convient, pour être prudent, d'établir des règles telles, qu'appliquées aux machines considérées comme bien construites, elles fournissent, comme dimensions, précisément celles qu'on peut relever sur ces machines; en opérant ainsi, nous laissons à l'avenir le soin de décider si un mode de construction plus léger est en état de fournir le degré de sécurité indispensable dans l'établissement d'une machine.

Les formes et les dimensions des pièces peuvent être déterminées, soit au sentiment, soit par le calcul, soit enfin par ces deux moyens réunis.

Le premier procédé repose sur ce sentiment des formes et des grandeurs que doit posséder tout constructeur sérieux; il est indispensable que cette qualité se trouve suffisamment développée par une assez longue pratique, l'instruction et les expériences, pour qu'elle puisse, dans chaque cas particulier, conduire à des résultats présentant une certaine sécurité. Ce n'est, du reste, qu'au bout de plusieurs années que, même dans les circonstances favorables, cette qualité arrive à son entier développement et peut rendre des services sérieux; toutefois il existe un grand nombre de circonstances, où le sentiment, abandonné à lui même et sans aucune base sur laquelle il puisse s'appuyer, est complétement incapable de conduire à un résultat satisfaisant.

Le second procédé, qui consiste à ne faire usage que du calcul, pour la détermination des formes et des dimensions, n'a

jamais donné de bons résultats et ne saurait d'ailleurs en donner, car il existe dans une machine une infinité d'éléments, qui ne peuvent pas être calculés du tout ou qui, pour l'être, exigent une grande dépense de temps et des connaissances étendues, qui sont tout à fait hors de proportion avec l'importance du but à atteindre. De plus le nombre des quantités qu'il importe de connaitre, dans un projet de machine, est tellement considérable que leur détermination, même en la supposant toujours possible, donnerait lieu à des calculs compliqués et sans fin. Cette méthode exclusivo par le calcul doit donc être entièrement rejetée.

Dans le troisième procédé, qui repose à la fois sur le calcul et le sentiment, on utilise, dans chaque cas particulier, le moyen qui paraît devoir être le plus simple, le plus rapide et le plus sur pour arriver au but final: on calcule les éléments qui peuvent être déterminés avec facilité et sécurité par le calcul, on utilise l'expérience pour les points où elle peut fournir des indications et enfin pour le reste on a recours au sentiment.

Ce troisième procédé est, à tous égards, bien préférable aux deux premiers; c'est évidemment le plus fécond, puisqu'il est, en réalité, formé de la réunion des deux méthodes précédentes; enfin c'est celui qui offre la plus grande sécurité, puisque les résultats, trouvés par un des moyens, peuvent être vérifiés par les deux autres; enfin il est très propre à former les commençants, qui, s'appuyant alternativement sur le sentiment, l'expérience et le calcul, arrivent à pouvoir se servir convenablement de ces trois méthodes, au bout d'un temps peu différent de celui qui leur eût été nécessaire pour se familiariser avec un seul des procédés.

J'ai toujours eu la conviction que cette méthode complexe était la seule admissible, et qu'elle était susceptible de conduire, pour la construction des pièces de machines, à des régles simples et d'une application facile, établies sur des bases scientifiques. Pendant longtemps je n'ai pu réaliser cette idée et je n'ai réussi que le jour où j'ai reconnu que la méthode cherchée devait reposer, non pas sur une théorie purement analytique et, par cela même en quelque sorte artificielle, mais bien sur le procédé qu'on suit, pour ainsi dire, naturellement ou instinctivement, lorsque, dans l'étude d'un projet de construction, on se laisse guider simplement par le sentiment. Un examen attentif de ce procédé m'a permis de reconnaitro que, pour arriver à de bons résultats, il fallait, en définitive, s'en tenir à l'application de cette règle

empirique, depuis longtemps connue: „les dimensions et les formes de toutes les pièces d'une machine doivent être exactement en rapport les unes avec les autres."

Il résulte de cette règle que, pour les formes indiquées par la résistance des matériaux, on n'a pas à chercher les valeurs absolues des dimensions, mais simplement les rapports de ces valeurs à celle d'une certaine dimension principale. C'est sur cette base que repose la méthode de construction, que j'ai désignée sous le nom de méthode des rapports, et qui ne laisse rien à désirer au double point de vue de la sécurité et de la facilité d'application.

Pour appliquer cette méthode à la construction des pièces de machines, on opère de la manière suivante: on commence par déterminer une ou plusieurs dimensions principales, en ayant recours, suivant les cas, au calcul, à l'expérience ou même au sentiment. Toutes les quantités et les dimensions, qui dépendent de ces dimensions principales, se trouvent alors déterminées au moyen des nombres qui représentent leurs rapports aux premières et on peut les obtenir sans calcul au moyen des tableaux que nous donnons plus loin et qui se trouvent également dans notre traité intitulé: „Résultats pour la construction des machines". On trouve de cette manière les dimensions de toutes les pièces mobiles et de tous les paliers, et on n'a plus dès-lors à déterminer que les pièces fixes, telles que les bâtis; on se borne, en général, à les tracer au sentiment, ce qui ne peut d'ailleurs présenter d'inconvénients sérieux, puisque les quantités, préalablement déterminées, fournissent un nombre de points de repère suffisant pour prémunir contre les erreurs.

Les formules, qui feront l'objet de ce chapitre, sont principalement fondées sur les principes de résistance et d'élasticité des matériaux, que nous avons exposés dans la première partie de ce traité; mais la forme spéciale qu'a permis de leur donner la méthode des rapports rend leur application extrêmement simple et facile. — Avant d'aborder l'établissement de ces formules, nous devons encore présenter quelques remarques sur les matériaux employés dans la construction des pièces de machines.

Matériaux de construction. Dans le développement de nos leçons sur la résistance et l'élasticité des matériaux, nous avons admis que la matière présentait toujours le double caractère de la continuité et de l'homogénéïté. En réalité, dans les matériaux

de construction, ces deux propriétés ne se trouvent réalisées qu'avec une certaine approximation et on peut se demander quelle influence peuvent exercer, sur la résistance et l'élasticité, ces imperfections des matériaux? Pour répondre à cette question, remarquons d'abord que ces imperfections forment deux espèces distinctes: 1° résistance variable de la matière aux différents points du corps; 2° espaces non occupés par la matière, qui constituent les trous, les pores, les crevasses et les fentes. L'influence de ces défectuosités de la matière sur la résistance dépend de leur étendue, de leur forme, de leur direction et principalement de la position qu'elles occupent dans le corps. Les parties défectueuses, qui se trouvent très-rapprochées de la fibre neutre, ne diminuent que très-peu la résistance du corps, puisque, en général, la matière, qui se trouve placée dans le voisinage de cette fibre, ne contribue que très-faiblement à la résistance.

L'effet est tout différent, si la matière présente, au contraire, ces défauts dans les parties où elle a à supporter les plus grands efforts, c'est-à-dire aux points où se produisent les tensions maxima.

La forme que présente une partie défectuense a également sur la résistance une influence très-variable, suivant la position qu'elle occupe par rapport au corps et le mode d'action des forces. Ainsi, par exemple, dans un corps soumis à la compression, les fentes longitudinales peuvent occasionner la rupture, tandis que celles qui sont dirigées transversalement, présentent beaucoup moins de danger. Dans tous les autres genres d'efforts, au contraire, les fentes longitudinales sont peu à redouter, tandis que les fentes transversales sont extrêmement dangereuses, surtout lorsqu'elles se trouvent correspondre précisément aux points où se produisent les plus grandes tensions.

Quelques exemples vont nous permettre de rendre plus claires ces indications générales:

1° Si, dans une pièce soumise à l'extension, il se produit des fentes longitudinales, la résistance n'est nullement diminuée; la présence de crevasses, dans le plan d'une section transversale, constitue un état dangereux.

2° Dans une pièce soumise à la flexion, la résistance ne se trouve que très-faiblement diminuée par les fentes longitudinales; il en est à peu près de même pour les crevasses transversales, lorsqu'elles se produisent dans le voisinage de la fibre neutre et surtout aux points où il n'existe que des pressions ou tout au

moins de très-faibles tensions; elles seraient au contraire très-dangereuses, si elles coïncidaient avec les points où ont lieu les maxima de tension. Pour une pièce soumise à la compression, les fentes longitudinales sont très-facheuses, tandis que celles qui sont dirigées transversalement ne présentent pas d'inconvénients sérieux.

3° Pour une pièce soumise à la torsion, les fentes parallèles à l'axe, ne diminuent pas sensiblement la résistance; il n'en est pas de même des fentes transversales, qui ont une influence très prononcée, lorsqu'elles se trouvent à la surface ou du moins à une assez grande distance de l'axe, autour duquel se produit la torsion.

4° Dans les parois d'un réservoir cylindrique, les fentes longitudinales sont ordinairement dangereuses, tandis que celles qui sont dirigées perpendiculairement aux génératrices ne diminuent que faiblement la résistance.

Pour éviter les dangers qui seraient la conséquence des défectuosités que nous venons d'indiquer, on doit observer certaines précautions spéciales dans la forme et la disposition à donner aux différentes pièces qu'on doit employer.

Dans les constructions en bois, on sait que, toutes choses égales d'ailleurs, la résistance est d'autant plus grande que les pièces présentent moins de nœuds et que leurs fibres sont plus saines. Si on a à utiliser, pour porter des charges, des poutres en bois offrant un certain nombre de nœuds, il convient de disposer ces pièces de telle manière que ces nœuds tombent, autant que possible, dans le voisinage de la couche neutre et non pas dans celle où se produit le maximum de tension.

Pour les pièces en fonte, qui doivent avoir des sections de grandes dimensions, il convient de choisir une forme de section telle que l'épaisseur, en aucun point, ne soit trop considérable. Un cylindre en fonte, par exemple, lorsqu'il est trop épais, présente généralement à l'intérieur des vides ou des creux, dont la production tient à ce que la solidification du métal fondu commence par la surface, pour n'arriver que plus tard à l'intérieur; il se produit d'abord une croute solide, tandis qu'au centre la matière est encore fluide; l'intérieur ne se solidifiant que plus tard, il en résulte que la matière, par suite de la contraction qu'elle éprouve, ne peut plus remplir tout l'espace compris à l'intérieur de l'anneau qui s'est formé au début, et dès-lors il se produit forcément des vides.

Il est de plus très important, dans l'opération du moulage, de ménager des trous dans la partie supérieure du moule, pour permettre à l'air et aux gaz de s'échapper, car autrement, en restant emprisonnés, ils produiraient, dans la partie supérieure de la pièce, des pores et des soufflures, qui amèneraient une diminution de résistance.

C'est principalement, dans la préparation des pièces de fer forgé de grandes dimensions, qu'on a recours à des procédés spéciaux. Lorsque de semblables pièces sont préparées directement au moyen de grosses loupes de fer, il n'est guère possible d'éviter les vides, car de pareilles masses renferment toujours des scories, qui ne peuvent être expulsées par le forgeage de loupes d'un grand volume. Lors donc qu'on veut obtenir des pièces de grandes dimensions sans défauts, il est presque indispensable de les préparer, en soudant ensemble un grand nombre de tiges ou de plaques minces, complètement dépourvues de scories; il est évident d'ailleurs que le soudage doit être aussi parfait que possible et qu'on doit apporter le plus grand soin à ce qu'il ne se produise aucun vide entre les surfaces de contact des pièces à souder. Le plus souvent ces surfaces de contact doivent être parallèles à la direction de la longueur de la pièce qu'il s'agit d'obtenir.

Quelques exemples feront mieux comprendre les règles à suivre en pareil cas:

1° Lorsqu'on a à établir une pièce d'une certaine épaisseur, qui doit être soumise à l'extension, on arrive à un résultat satisfaisant, en formant un paquet de tiges minces qu'on soude ensemble; dans ce cas, même avec un soudage imparfait, la résistance à la rupture par extension ne se trouve pas diminuée.

2° Pour les pièces qui doivent résister à la flexion, il convient de les composer de plaques soudées ensemble, dont les plans de séparation et la plus grande dimension soient parallèles à la direction de la force fléchissante.

3° Les arbres en fer forgé, qui ont à résister à la torsion doivent être formés de longues tiges soudées ensemble. Dans ce cas, comme dans le précédent, une imperfection dans le soudage ne peut entrainer d'inconvénients sérieux.

4° Pour les réservoirs cylindriques, le soudage d'une série de tiges parallèles à l'axe est à rejeter; il est bien préférable de courber de longues tiges en hélices et de les réunir par un

soudage. C'est ainsi, par exemple, qu'on arrive à établir, dans d'excellentes conditions, les canons de fusil en fer forgé.

Ressorts en acier.

Les ressorts à spirales, cylindriques ou coniques, ne sont généralement employés, pour supporter des charges, que dans le cas où l'on ne dispose, pour l'établissement de ressorts, que d'un espace très-restreint. Lorsqu'on n'est pas limité à ce dernier point de vue, on fait plus souvent usage des ressorts à lames composés d'une série de bandes d'acier légèrement courbes, de largeur égale et de faible épaisseur. Cette forme de ressorts est notamment employée pour les wagons des chemins de fer.

Pour arriver à formuler la théorie des ressorts de cette nature, nous admettrons, comme point de départ, les hypothèses suivantes:

1°, la section de chaque lame, prise isolément, est un rectangle.

2°, toutes les lames ont la même largeur, mais des épaisseurs variables.

3°, à l'état naturel, quand le ressort n'est pas chargé, toutes les lames ont une courbure uniforme, suivant un arc de cercle dont le rayon est constant et suffisamment grand.

4°, L'épaisseur des lames est un peu plus forte, au milieu et aux extrémités, que dans les autres points, de telle sorte que ces lames superposées ne se touchent que par leurs milieux et leurs extrémités. — La fig. 3, pl. VI, représente un ressort ainsi disposé.

Désignons par P_1 la force, qui agit sur chacune des extrémités de la lame supérieure, par $P_2, P_3, P_4 \ldots$ les pressions de la première lame sur l'extrémité de la seconde, de la seconde sur l'extrémité de la troisième, et ainsi de suite.

Soient $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ les distances des extrémités des lames au plan O Y de la ligature qui les réunit,

n le nombre des lames,

$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$ les épaisseurs des lames aux points où elles ne se touchent pas,

b la largeur commune de toutes les lames,

$x_1 = O\,p$, $y_1 = m_1\,p$ les coordonnées d'un point quelconque m_1 de la ligne des centres de gravité de la lame supérieure, ces coordonnées étant rapportées au système d'axes Y O X,

$x_2, y_2 \ldots x_3, y_3 \ldots$ les coordonnées analogues pour les autres lames.

R le rayon de courbure naturel de toutes les lames à l'état de repos,

$\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots$ les rayons de courbure qui correspondent aux points dont les coordonnées sont $x_1\, y_1,\ x_2\, y_2 \ldots$ lorsque les lames sont chargées,

ε le module d'élasticité de l'acier employé.

Menons à la distance x, et parallèlement à O Y, un plan qui rencontre toutes les lames et étudions les tensions et les courbures qui se produisent aux points $m_1, m_2, m_3 \ldots$ où ce plan vient couper les lignes des centres de gravité des diverses lames. A cet effet remarquons que les expressions suivantes:

$$\left.\begin{array}{r} P_1\,(l_1 - x) - P_2\,(l_2 - x) = P_1\,l_1 - P_2\,l_2 - (P_1 - P_2)\,x \\ P_2\,(l_2 - x) - P_3\,(l_3 - x) = P_2\,l_2 - P_3\,l_3 - (P_2 - P_3)\,x \\ P_3\,(l_3 - x) - P_4\,(l_4 - x) = P_3\,l_3 - P_4\,l_4 - (P_3 - P_4)\,x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n-1}\,(l_{n-1} - x) - P_n\,(l_n - x) = P_{n-1}\,l_{n-1} - P_n\,l_n - (P_n - P_{n-1})\,x \\ P_n\,(l_n - x) = P_n\,(l_n - x) \end{array}\right\} \quad . \; (1)$$

représentent les moments des forces extérieures, qui développent des tensions ou des pressions dans les sections $m_1\, m_2 \ldots$; ces expressions ne s'appliquent toutefois qu'aux points qui ne font pas partie des extrémités renforcées des lames.

D'après l'équation (4), page 49, les moments des tensions ou des pressions qui s'exercent en $m_1\, m_2 \ldots$ ont pour expression:

$$-\varepsilon\,\mu_1\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{R}\right), \quad -\varepsilon\,\mu_2\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{R}\right), \quad -\varepsilon\,\mu_3\left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{R}\right), \quad \ldots$$

on doit d'ailleurs ici prendre chacune de ces valeurs avec le signe —, attendu que la charge diminue la courbure des lames. Nous obtenons donc, pour l'état d'équilibre, les relations suivantes:

$$\left.\begin{array}{r} P_1\,l_1 - P_2\,l_2 - (P_1 - P_2)\,x = \varepsilon\,\mu_1\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho_1}\right) \\ P_2\,l_2 - P_3\,l_3 - (P_2 - P_3)\,x = \varepsilon\,\mu_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho_2}\right) \\ P_3\,l_3 - P_4\,l_4 - (P_3 - P_4)\,x = \varepsilon\,\mu_3\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho_3}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n-1}\,l_{n-1} - P_n\,l_n - (P_n - P_{n-1})\,x = \varepsilon\,\mu_1\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{P_{n-1}}\right) \\ P_n\,l_n - P_n\,x = \varepsilon\,\mu_n\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho_n}\right) \end{array}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

Dans ces relations $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ représentent les moments d'inertie des sections des différentes lames. Comme, en vertu de notre hypothèse, ces sections sont des rectangles, il en résulte qu'on a:

$$\mu_1 = \frac{1}{12} b \delta_1^3, \quad \mu_2 = \frac{1}{12} b \delta_2^3, \quad \mu_3 = \frac{1}{12} b \delta_3^3 \quad . \quad . \quad (3)$$

D'autre part, pour calculer les tensions $S_1, S_2, S_3 \ldots$ qui se produisent dans les sections d'encastrement, nous avons encore les équations:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{1}{6} S_1 b \delta_1^2 \\ P_2 l_2 - P_3 l_3 = \frac{1}{6} S_2 b \delta_2^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n-1} l_{n-1} - P_n l_n = \frac{1}{6} S_{n-1} b \delta^2_{n-1} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

A l'aide de ces équations on peut arriver aux conditions que les ressorts doivent remplir, pour donner pratiquement de bons résultats. Dans cet ordre d'idées, les principales conditions à réaliser sont les suivantes:

1°, Faire travailler également toutes les lames, de telle sorte que la probabilité d'une rupture soit la même pour chacune d'elles;

2°, Faire en sorte que les courbures des lames, lorsque le ressort est chargé, soient des lignes concordantes, de manière à ce que, à l'état de tension, deux lames contigues se toucheraient sur toute leur étendue, si elles n'avaient pas de surépaisseur au milieu et aux extrémités.

Des ressorts, satisfaisant à ces conditions, ne seront pas exposés à s'ouvrir et toutes leurs lames seront également résistantes.

Ces deux conditions seront remplies: 1°, si toutes les tensions $S_1, S_2, S_3 \ldots$ sont égales; 2°, si les rayons de courbure $\rho_1, \rho_2 \ldots$ ont tous la même valeur pour une valeur quelconque de x.

En vertu des équations (4), pour que toutes les tensions soient égales, il faut qu'on ait:

$$\frac{6}{\delta_1^2}(P_1 l_1 - P_2 l_2) = \frac{6}{\delta_2^2}(P_2 l_2 - P_3 l_3) = \frac{6}{\delta_3^2}(P_3 l_3 - P_4 l_4) = \quad . \quad . \quad (5)$$

et d'autre part, d'après les équations (2), tous les rayons de courbure seront égaux, si l'on a:

$$\frac{12}{b\,\delta_1^3}(P_1\,l_1 - P_2\,l_2) = \frac{12}{b\,\delta_2^3}(P_2\,l_2 - P_3\,l_3) = \frac{12}{b\,\delta_3^3}(P_3\,l_3 - P_4\,l_4) = . \quad (6)$$

et

$$\frac{12}{b\,\delta_1^3}(P_1 - P_2) = \frac{12}{b\,\delta_2^3}(P_2 - P_3) = \frac{12}{b\,\delta_3^3}(P_3 - P_4)\;.\;.\;. \quad (7)$$

On tire de là :

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;. = \delta_n \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (8)$$

$$P_1 - P_2 = P_2 - P_3 = P_3 - P_4 = \;.\;.\;. = p \;\;.\;.\;. \quad (9)$$

$$P_1\,l_1 - P_2\,l_2 = P_2\,l_2 - P_3\,l_3 = P_3\,l_3 - P_4\,l_4 \;.\;. = \frac{1}{6}\,S_1\,b\,\delta_1^2. \quad (10)$$

p désignant, dans l'équation (9), une pression constante.

Si l'on ajoute membre à membre les n équations (10), on trouve :

$$P_1\,l_1 = \frac{n}{6}\,S_1\,b_1\,\delta_1^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (11)$$

Si on se borne à additionner, sur ces n équations, les $k - 1$ premières, on obtient :

$$P_1\,l_1 - P_k\,l_k = (k-1)\,\frac{1}{6}\,S_1\,b\,\delta_1^2. \quad .\;. \quad (12)$$

et en ajoutant $k - 1$ des équations (9) :

$$P_1 - P_k = (k-1)\,p$$

ou

$$P_k = P_1 - (k-1)\,p \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (13)$$

Si, dans l'équation (12), on remplace S_1 par sa valeur, tirée de l'équation (11), et P_k par sa valeur tirée de l'équation (13), on obtient :

$$l_k = l_1\,\frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1 - (k-1)\,\frac{p}{P_1}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (14)$$

expression qui détermine la longueur de la $k^{ème}$ lame.

La grandeur p est arbitraire entre certaines limites ; comme cette valeur ne peut pas être négative, le minimum de p ou de $\frac{p}{P_1}$ est égal à o. Mais, d'après l'équation (14), $\frac{p}{P_1}$ ne peut pas

être plus grand que $\frac{1}{n}$, puisqu' aucune lame ne doit être plus longue que celle du haut. Si donc nous posons:

$$p = \frac{1}{\gamma} \frac{P_1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

γ représentera un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, ayant pour limite inférieure l'unité. Cette valeur de $\frac{p}{P_1} = \frac{1}{\gamma n}$, portée dans l'équation (14), donne:

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1 - \frac{k-1}{n} \frac{1}{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Ressorts rectangulaires.

Si, dans l'expression précédente, on donne à γ la plus petite valeur qu'il puisse avoir, c'est-à-dire si on le fait égal à l'unité, on trouve $l_k = l_1$; on obtient donc, dans ce cas, un ressort dont toutes les lames ont la même longueur et auquel nous donnerons le nom de ressort rectangulaire, par suite de la forme qu'il présente (fig. 4, pl. VI), lorsque toutes les lames sont superposées sans être chargées. Lorsqu'un ressort de ce genre travaille, les lames se trouvent courbées suivant certaines courbes élastiques. Elles présentent donc une résistance variable, en leurs différents points, avec la distance à la section d'encastrement; c'est dans cette section même que la tension atteint son maximum, puisque c'est là que le rayon de courbure est le plus petit. L'équation (15) montre que pour $\gamma = 1$, $p = \frac{P_1}{n}$, c'est-à-dire que, dans les ressorts de cette espèce, la différence des pressions, sur deux lames consécutives, est constante et égale à $\frac{1}{n}$ de la charge qui agit à l'extrémité de la lame supérieure.

Ressort trapézoïdal.

Si nous prenons maintenant pour γ son autre valeur limite, c'est-à-dire si nous posons $\gamma = \infty$, l'équation (16) donne:

$$l_k = l_1 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

remplaçons k par $k + 1$, nous aurons:

$$l_{k+1} = l_1\left(1 - \frac{k}{n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

d'où

$$l_k - l_{k+1} = \frac{l_1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

c'est-à-dire que nous obtenons un ressort, dans lequel la différence de longueur de deux lames consécutives reste constante et égale à $\frac{1}{n}$ de la longueur de la lame supérieure. Si on superpose les lames satisfaisant à cette condition, on obtient un système qui, à l'état de repos, a la forme d'un trapèze (fig. 5, pl. VI). Pour $\gamma = \infty$, $p = o$, c'est-à-dire que, dans ce cas, l'action exercée par la première lame sur la seconde est égale à celle de la seconde sur la troisième, et ainsi de suite. Comme $p = P_1 - P_2 = P_2 - P_3 \ldots.$ il en résulte que ces différences s'annulent en même temps que p et, dès-lors, dans les équations (2), tous les termes qui contiennent x disparaissent; les rayons de courbure deviennent donc indépendants de x et ont la même valeur pour les diverses lames. Il suit de là que, dans ces ressorts, les lames chargées prennent une courbure en arc de cercle. Si les lames, à l'état de repos, sont déjà courbées en arc de cercle, il se produit, en chaque point de chacune des lames, une seule et même variation de courbure, d'où il résulte que la tension, par unité de surface, est constante pour tous les points de toutes les lames. Les ressorts à plan trapézoïdal présentent donc cette propriété importante qu'ils travaillent également en tous leurs points; en d'autres termes ils constituent des systèmes d'égale résistance.

Ressorts hyperboliques.

Les types de ressorts qu'on obtient, quand on donne à γ des valeurs comprises entre 1 et ∞ se rapprochent du système rectangulaire ou du système trapézoïdal, suivant que ces valeurs diffèrent peu de l'unité ou qu'au contraire elles deviennent très-considérables.

En général, tous les systèmes de ressorts, pour lesquels γ est compris entre l'unité et l'infini, jouissent d'une propriété commune, exprimée par l'équation (16) et qui consiste en ce que les extrémités des lames superposées, en les supposant primitivement

droites, forment des arcs d'hyperbole. C'est pour cette raison que nous désignerons les ressorts de ce genre (fig. 6, pl. VI), sous le nom de ressorts hyperboliques.

Dans ce système, sous l'action des charges, les tensions dans chaque lame vont en augmentant progressivement jusqu'à la section d'encastrement; la résistance n'est donc pas la même en tous les points; ce qui constitue une infériorité notable par rapport au système trapézoïdal.

Flexibilité. En dehors des conditions de résistance que nous venons d'examiner, un autre élément, dont il importe de tenir compte dans la pratique, est la flexibilité. Pour traiter la question à ce nouveau point de vue, nous commencerons par calculer la quantité dont fléchit l'extrémité de la lame supérieure, sous l'action d'une charge donnée.

Pour l'état d'équilibre de la lame supérieure, la première des équations (2) nous donne:

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 - (P_1 - P_2) x = \varepsilon \mu_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$$

On a d'ailleurs:

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{S_1}{6} b \delta_1^2, \quad P_1 - P_2 = p = \frac{1}{\gamma} \frac{P_1}{n}, \quad \mu = \frac{1}{12} b \delta_1^3$$

L'équation précédente devient donc:

$$\frac{1}{6} s b \delta_1^2 - \frac{1}{\gamma} \frac{P_1}{n} x = \frac{\varepsilon}{12} b \delta_1^3 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$$

Si l'on suppose que la courbure soit faible, avant et après l'action de la charge, on peut poser:

$$\varrho_1 = + \frac{d x^2}{d^2 y}$$

ce qui donne pour l'équation ci-dessus:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{R} - \frac{2 S_1}{\varepsilon \delta_1} + \frac{12 P_1}{\varepsilon b \delta_1^3 n \gamma} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

A la rigueur cette équation n'est applicable qu'à la partie moyenne de la lame (pour $x \leqq l_2$); mais, comme dans tous les ressorts employés, la différence $l_1 - l_2$ est très-faible, il en résulte qu'on ne commet pas d'erreur sensible, en étendant cette équation à la longueur entière l_1.

Une première intégration donne:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,S_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right) x + \frac{12\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,\frac{x^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Sans constante à ajouter, puisque $\frac{dy}{dx} = o$ pour $x = o$.

L'intégration de l'équation (21) conduit à:

$$y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,S_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{12\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,\frac{x^3}{6} + \text{Const.}$$

Si on désigne par a l'ordonnée de l'origine de la ligne élastique, on a $y = a$ pour $x = o$, d'où const. $= a$ et par suite:

$$y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,S_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,x^3 + a$$

Si Y est l'ordonnée de l'extrémité de la lame, pour laquelle $x = l_1$, on a:

$$Y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,S_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right)\frac{l_1^2}{2} + \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,l_1^3 + a$$

et

$$Y - a = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,S_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right)\frac{l_1^2}{2} + \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,l_1^3.$$

Pour la lame à l'état de repos, il faut faire $P_1 = o$ et $S_1 = o$, ce qui donne:

$$(Y - a)_o = \frac{l_1^2}{2\,R}$$

mais $(Y - a)_o - (Y - a)$ n'est autre chose que la flèche et, si on la désigne par f, on a:

$$f = \frac{2\,S_1}{\varepsilon\,\delta_1}\,\frac{l_1^2}{2} - \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,l_1^3. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

ou, en éliminant P_1, à l'aide de la relation (11):

$$f = \frac{S_1\,l_1^2}{\varepsilon\,\delta_1}\left(1 - \frac{1}{3\,\gamma}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Résultats d'application. — Lorsqu'il s'agit d'établir un ressort, on se donne en général:

1°. la charge P_1 qui agit à l'extrémité de la lame supérieure,

2°, la distance l_1 de l'extrémité de la lame supérieure au plan de réunion et d'encastrement des lames,
3°, la tension S_1, par unité de surface, qui doit se produire dans la section d'encastrement,
4°, la flèche f que doit déterminer la charge,
5°, la largeur b de chaque lame.

Les quantités à déterminer sont dans ce cas:
1°, l'épaisseur δ_1 de chacune des lames,
2°, le nombre n de ces lames,
3°, la longueur l_k des différentes lames, à l'exception de la lame supérieure.

La détermination de ces trois éléments résulte immédiatement des relations précédentes.

L'équation (23) donne:

$$\delta_1 = \frac{S_1 l_1^2}{\varepsilon f}\left(1 - \frac{1}{3\gamma}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

δ_1 étant connu, on tire de l'équation (11):

$$n = \frac{6 P_1 l_1}{S_1 b \delta_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

On a enfin par l'équation (16):

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1 - \frac{k-1}{n}\frac{1}{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Dans cette formule γ est d'ailleurs une quantité qu'on peut faire égale ou supérieure à l'unité ou même infinie. Si l'on prend pour γ une valeur intermédiaire entre l'unité et l'infini, les équations conduisent, comme nous l'avons vu, à un système de ressorts hyperboliques.

Si l'on fait $\gamma = 1$, on obtient un ressort rectangulaire, et l'on a dans ce cas:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{2}{3}\frac{S_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n &= \frac{6 P_1 l_1}{S_1 b \delta_1^2} \\ l_k &= l_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Si enfin on fait $\gamma = \infty$, on arrive au ressort trapézoïdal ou d'égale résistance, pour lequel les relations deviennent:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{S_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n &= \frac{6 P_1 l_1}{S_1 b \delta_1^2} \\ l_k &= l_1 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Valeurs de S_1, ε et f. — La matière employée pour la construction des ressorts est généralement l'acier. Si donc on prend pour unités le centimètre et le kilogramme, on peut admettre, comme valeur moyenne de ε pour de l'acier fondu de bonne qualité.

$$\varepsilon = 2.000.000$$

D'après un grand nombre de calculs faits sur des ressorts de locomotives, on trouve que la tension par unité de surface est, en moyenne, $S_1 = 4400$ kilogrammes, tandis que la limite d'élasticité correspond à une tension de 8000 kilogrammes, et que la charge de rupture est généralement supérieure à 14000. Nous poserons donc:

$$S_1 = 4400$$

Quant à la flèche, on peut admettre que pour les locomotives à grande vitesse f varie de

4 à 5 centimètres

et pour les locomotives à marchandises de

3 à 4 centimètres.

Si on prend f très-petit, les équations (24) et (25) montrent que δ_1 est nécessairement grand tandis que n est petit, c'est-à-dire que les ressorts se trouvent composés, dans ce cas, d'un petit nombre de lames de forte épaisseur.

Si au contraire f a une assez grande valeur, δ_1 est petit et n considérable. Les ressorts très-flexibles doivent donc être formés d'un grand nombre de lames minces.

On trouvera, dans le traité des locomotives, des indications plus détaillées sur les ressorts dont on fait usage dans l'établissement de ces machines.

Ressorts à hélice cylindrique.

Supposons qu'un fil d'acier, contourné en hélice cylindrique, repose sur un plan et soit chargé à sa partie supérieure, comme l'indiquent les fig. 7 et 8, pl. VI. Admettons que l'extrémité supérieure du fil soit ramenée vers l'axe du cylindre et que la charge agisse sur cette extrémité exactement suivant la direction de cet axe.

Considérons l'hélice qui passe par les centres de gravité de toutes les sections du ressort; si, par un point quelconque M de cette ligne, nous menons la tangente L à l'hélice, le plan déterminé par cette tangente et le rayon r, perpendiculaire à l'axe de l'hélice, sera le plan de courbure de la fibre moyenne du ressort et r son rayon de courbure. Pour appliquer à ce cas la théorie générale que nous avons donnée, page 87, prenons pour axe des x le prolongement du rayon r, pour axe des y la tangente L à la courbe, enfin pour axe des z la perpendiculaire aux deux axes précédents, menée par le point m. Si nous négligeons le poids du ressort, P est la seule force extérieure, et on a:

$$X = o, \quad Y = -P \sin m, \quad Z = -P \cos m,$$

m représentant l'angle de l'hélice sur l'horizon. D'autre part, les coordonnées du point d'application de la force P sont:

$$x = -r, \quad y = h \sin m, \quad z = h \cos m,$$

h désignant la hauteur du point d'application de la force P au-dessus du point M.

Les équations des moments nous donneront alors:

$$\Sigma (Y z - Z y) = -P \sin m \times h \cos m + P \cos m \times h \sin m = o$$

$$\Sigma (Y x - X y) = +P r \sin m$$

$$\Sigma (X z - Z x) = +P r \cos m$$

ou très-approximativement, attendu que dans tous les cas de la pratique l'angle m est très-petit:

$$\Sigma (Y z - Z y) = o \qquad \Sigma (Y x - X y) = o$$

$$\Sigma (X z - Z x) = P r.$$

De plus les équations de condition (8), page 91, sont sensiblement satisfaites, si l'on pose $\beta = o$, $\rho = \rho_o$, c'est-à-dire si on

admet que la compression ne modifie presque pas le rayon du cylindre. La dernière des équations (8), devient alors:

$$P\,r = G\,I_y\,\frac{d\,\Theta}{d\,s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et cette équation détermine la compression du ressort. Appelons du la quantité infiniment petite dont s'abaisse le point d'application de la force P, lorsque le ressort a tourné de l'angle $d\,\Theta$ sur une longueur $d\,s$, on a $d\,u = r\,d\,\Theta$. Par les deux extrémités de l'élément d'arc $d\,s$ et par l'axe du cylindre faisons passer deux plans; soit $d\,\varphi$ l'angle infiniment petit de ces deux plans. Comme l'inclinaison m de l'hélice à été supposée très-faible, il en résulte qu'on a approximativement $d\,s = r\,d\,\varphi$. L'équation précédente devient donc:

$$P\,r = G\,I_y\,\frac{d\,u}{r^2\,d\,\varphi}$$

d'où en intégrant:

$$u = \frac{P\,r^3}{G\,I_y}\,\varphi$$

Soit n le nombre des spires; on a pour le ressort entier:

$$\varphi = 2\,\pi\,n,$$

d'où:

$$u = \frac{P\,r^3}{G\,I_y}\,2\,\pi\,n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si nous désignons par T l'intensité de la force de glissement qui s'exerce au point le plus éloigné du centre de gravité, à la distance k, on a d'après la théorie de la torsión et en vertu de l'équation (3), page 56:

$$P\,r = \frac{T\,I_y}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Pour une tige à section circulaire de diamètre d, on a:

$$I_y = \frac{\pi\,d^4}{32} \quad k = \frac{d}{2}$$

Par suite:

$$u = 64\,\frac{P\,r^3\,n}{G\,d^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$P = \frac{T\,\pi}{16}\,\frac{d^3}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Si la section est un rectangle dont b et h soient les côtés:

$$I_y = \frac{1}{12} (b^2 + h^2)\, b\, h, \qquad k = \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 + h^2)}$$

ce qui donne pour u et P:

$$u = 24\,\pi\, \frac{P\, r^3\, n}{G\,(b^2 + h^2)\, b\, h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$P = \frac{1}{6}\, \frac{T}{r} \sqrt{b^2 + h^2}\;\; b\, h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

La valeur de G et celle de T, correspondant à la rupture, sont données dans le tableau de la page 95:

Ressorts à hélice conique.

Pour un ressort à hélice conique (fig. 9, pl. VI), on trouve exactement comme dans le cas d'nn ressort cylindrique:

$$\Sigma\,(Y\, z - Z\, y) = 0 \qquad \Sigma\,(Y\, x - X\, y) = 0$$

$$\Sigma\,(X\, z - Z\, x) = P\, r$$

$$P\, r = G\, I_y\, \frac{d\,\Theta}{d\, s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Dans ces équations, r désigne la distance à l'axe d'un point quelconque de l'hélice conique. Si l'on admet que le ressort soit disposé de telle sorte qu'en projection horizontale les spires soient toutes écartées d'une quantité constante $\varDelta$, on peut poser:

$$r\, d\,\Theta = d\, u, \qquad d\, s = r\, d\, \varphi, \qquad r = \frac{\varDelta}{2\,\pi}\, \varphi,$$

et l'équation (1) devient alors:

$$d\, u = \frac{P}{G\, I_y} \left(\frac{\varDelta}{2\,\pi}\right)^3 \varphi^3\, d\, \varphi$$

d'où on tire:

$$u = \frac{P}{G\, I_y} \left(\frac{\varDelta}{2\,\pi}\right)^3 \frac{\varphi^4}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Si n est le nombre des spires qui constituent le ressort, R leur plus grand rayon (fig. 9), on a:

$$n\, \varDelta = R, \qquad \varphi = 2\,\pi\, n$$

et par conséquent

$$u = \frac{\pi}{2} \frac{P}{G\, I_y} R^3 n \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

On a également:

$$P = \frac{T}{R} \frac{I_y}{k} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Pour une section circulaire:

$$I_y = \frac{\pi\, d^4}{32}, \qquad k = \frac{d}{2},$$

On a donc:

$$\left.\begin{aligned} u &= 16 \frac{P}{G} \frac{R^2 n}{d^4} \\ P &= \frac{\pi\, T}{16} \frac{d^3}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Pour une section rectangulaire:

$$I_y = \frac{1}{12}\, b\, h\, (h^2 + b^2), \qquad k = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + h^2}$$

Par suite:

$$\left.\begin{aligned} u &= 6\,\pi\, \frac{P\, R^2\, n}{G\, b\, h\, (b^2 + h^2)} \\ P &= \frac{T}{6} \frac{b\, h \sqrt{b^2 + h^2}}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Ressort plan à spirale.

Supposons qu'un ressort plan à spirale, (fig. 10, pl. VI), soit fixé en A et que son extrémité intérieure soit reliée en O à une axe. Sous l'action du couple formé par les forces $\frac{1}{2}$ P et $\frac{1}{2}$ P, cet axe tournera jusqu'à ce qu'il se produise un état d'équilibre.

Pour appliquer au cas actuel notre théorie générale de la page 87, nous regarderons l'extrémité intérieure du ressort comme libre, à la condition d'introduire des forces susceptibles de remplacer la liaison avec l'axe. Cet axe développe sur ses pivots, ou points d'appui, certaines pressions. Supposons que ces pivots soient supprimés et appliquons sur l'axe deux forces F et N re-

présentant, en grandeur et en direction, les pressions que les pivots, avant d'être enlevés, exerçaient sur l'axe. Cette substitution ne trouble pas les conditions d'équilibre et permet de considérer comme libre l'extrêmité intérieure du ressort.

Prenons un point quelconque M sur la ligne d'axe de la spirale; traçons la tangente M y et la normale M z, dont la direction coïncide à très peu près avec celle de O M, à condition d'admettre que la distance entre deux spires consécutives soit très petite.

Si nous comparons la figure 10 avec la figure 2, pl. VI, qui nous a servi pour établir notre théorie générale, nous voyons que les quantités désignées par x et X sont nulles, c'est-à-dire que $x = 0$ et $X = 0$. On a donc:

$$\Sigma (Y x - X y) = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma (X z - Z x) = 0$$

La troisième et la quatrième des équations (8), page 91, donnent donc:

$$0 = \epsilon \left[\left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) I_{\xi \zeta} + \frac{\sin \beta}{\varrho} I_{\xi} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$0 = G I_y \frac{d \Theta}{d s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et ces équations seront satisfaites si l'on a:

$$I_{\xi \zeta} = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \frac{d \Theta}{d s} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

c'est-à-dire si la section du ressort est telle que le plan de flexion (qui coïncide avec le plan de la figure) la divise en deux moitiés symétriques et si, par suite, il ne se produit de flexion qu'autour de l'axe des x. La condition $\frac{d \Theta}{d s} = 0$ signifie qu'il ne doit se produire aucune torsion, résultat d'ailleurs facile à prévoir sans aucun calcul. La seconde des équations (8) devient, en y introduisant la condition $\beta = 0$:

$$\Sigma (Y z - Z y) = \epsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) I_{\zeta}$$

ou, si l'on désigne par μ le moment d'inertie I_{ζ} de la section du ressort par rapport à un axe passant en M et perpendiculaire au plan de la figure:

$$\Sigma\,(Y\,z - Z\,y) = \varepsilon\,\mu\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Mais $\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)$ est la somme des moments statiques de toutes les forces extérieures, qui agissent sur la partie du ressort, comprise entre le point M et une des extrémités, ces moments étant pris par rapport à un axe passant en M et perpendiculaire au plan de la figure. On a donc:

$$\Sigma\,(Y\,z - Z\,y) = P\,R + (N\,y_1 - F\,z_1)$$

$y_1 = O\,p$, $z_1 = M\,p$ représentant les coordonnées du point M dans le système d'axes auquel sont rapportées les forces F et N.

L'équation (4) devient donc:

$$P\,R + N\,y_1 - F\,z_1 = \varepsilon\,\mu\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Si l'on multiplie cette équation par l'élément d'arc $d\,s_1$ de la spirale, et si l'on intègre, en étendant l'intégration à la longueur entière de cette spirale, on trouve:

$$\int P\,R\,d\,s_1 + \int N\,y_1\,d\,s_1 - \int F\,z_1\,d\,s_1 = \int \varepsilon\,\mu\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) d\,s_1$$

ou, comme P, R, N, F, ε, μ, dans cette intégration, sont des constantes:

$$P\,R\int d\,s_1 + N\int y_1\,d\,s_1 - F\int z_1\,d\,s = \varepsilon\,\mu\int\left(\frac{d\,s_1}{\varrho} - \frac{d\,s_1}{\varrho_0}\right) \quad (6)$$

Si l'on désigne par l la longueur entière de la spirale, par η et ν les coordonnées du centre de gravité de la spirale entière, rapportées au système d'axes passant par le point O, on a, comme on sait:

$$\left.\begin{aligned} \int d\,s_1 &= l \\ \int y_1\,d\,s_1 &= l\,\nu \\ \int z_1\,d\,s_1 &= l\,\eta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

L'équation (6) devient alors:

$$P\,R\,l + (N\,\eta - F\,\nu)\,l = \varepsilon\,\mu\int\left(\frac{d\,s_1}{\varrho} - \frac{d\,s_1}{\varrho_0}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Si nous faisons abstraction de l'allongement que peut produire sur la fibre d'axe la résultante ΣY, $\frac{ds_1}{\varrho}$ et $\frac{ds_1}{\varrho_0}$ représentent les angles infiniment petits que forment les normales menées par les extrémités de l'arc ds_1, à l'état naturel du ressort et après la déformation; si nous posons:

$$\frac{d s_1}{\varrho} = d \varphi \qquad \frac{d s_1}{\varrho_0} = d \varphi_0$$

nous obtiendrons:

$$\int\left(\frac{d s_1}{\varrho} - \frac{d s_1}{\varrho_0}\right) = \int(d \varphi - d \varphi_0) = \Theta \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Θ désignant l'angle de rotation de la spirale sous l'action du couple $\frac{1}{2}$ P, $\frac{1}{2}$ P, c'est-à-dire l'angle décrit par les bras de levier sur lesquels agissent les deux forces composant ce couple, jusqu'au moment où se produit l'équilibre. En tenant compte de l'équation (9), la relation (8) donne:

$$[P R + N \eta - F \nu] \, l = \varepsilon \mu \Theta. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Dans le cas où l'on aurait $N \eta - F \nu = 0$, elle se réduirait à

$$P R l = \varepsilon \mu \Theta \qquad \text{ou} \qquad \Theta = \frac{P R l}{\varepsilon \mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

c'est-à-dire que, dans le cas où $N \eta - F \nu = 0$, l'angle de rotation Θ est proportionnel au moment de torsion des forces extérieures. Or, la quantité $N \eta - F \nu$ est nulle dans deux cas:

1°. Quand les pressions de l'axe sur ses supports sont nulles, c'est-à-dire quand $N = 0$ et $F = 0$.

2°. Quand les quantités η et ν sont nulles, c'est-à-dire quand le ressort a une forme telle que le centre de gravité de sa ligne d'axe se trouve sur l'axe autour duquel se produit la rotation; cette condition est très sensiblement réalisée pour les ressorts formés d'un grand nombre de spires très minces.

Dans l'application des ressorts de ce genre aux mécanismes d'horlogerie, il est très-important que l'angle de rotation soit exactement proportionnel au moment de rotation, attendu que, dans ce cas seulement, les durées des oscillations du balancier conservent la même valeur, quelle que soit l'amplitude de ces oscillations, condition essentielle pour assurer à l'appareil une marche régulière.

Dans les applications pratiques du ressort à spirale, ou du spiral, on peut toujours admettre que le centre de gravité tombe suffisamment près de l'axe de rotation, pour que l'on puisse, sans erreur sensible, négliger le terme $N\eta - F\nu$, c'est-à-dire appliquer l'équation (11).

Pour un ressort à section circulaire de diamètre d, on a: $\mu = \frac{\pi}{64} d^4$.

Pour un ressort à section rectangulaire, b étant le côté parallèle à l'axe de rotation, h l'épaisseur suivant le rayon, on a $\mu = \frac{1}{12} b h^3$.

On a donc, pour les ressorts à section circulaire:

$$\theta = \frac{64}{\pi \epsilon} \frac{P R l}{d^4} \qquad (12)$$

Pour les ressorts à section rectangulaire:

$$\theta = \frac{12}{\epsilon} \frac{P R l}{b h^3} \qquad (13)$$

Si l'on néglige la tension due aux forces ΣY, la tension maximum σ, qui se produit en chaque point de la surface extérieure, par suite de l'enroulement de la lame de ressort, est:

$$\sigma = \frac{P R}{E}$$

Comme pour la section circulaire . . . . $E = \frac{\pi}{32} d^3$

et pour la section rectangulaire . . . . $E = \frac{1}{6} b h^2$

il en résulte qu'on a, dans le premier cas:

$$\sigma = \frac{32}{\pi} \frac{P R}{d^3} \qquad P R = \frac{\sigma \pi}{32} d^3$$

et dans le second

$$\sigma = 6 \frac{P R}{b h^2} \qquad P R = \frac{\sigma}{6} b h^2 \qquad (14)$$

Torsion des ressorts à hélice cylindrique.

Considérons maintenant un ressort à hélice cylindrique (fig. 11 et 12, pl. VI). L'extrémité A est fixe et l'autre extrémité B est articulée à un levier mobile autour d'un axe, qui coïncide

avec l'axe géométrique du cylindre de l'hélice, et autour duquel tend à le faire tourner l'action du couple $\frac{P}{2}$, $\frac{P}{2}$. La fig. 12 est la projection de l'hélice sur un plan perpendiculaire à son axe. Pour déterminer la ligne passant par les centres de gravité des sections normales du ressort, choisissons un système d'axes rectangulaires $O\,x_1\,y_1\,z_1$, dans lequel l'axe $O\,x_1$ coïncide avec l'axe géométrique du cylindre, $O\,y_1$ étant parallèle à la direction du levier du couple et $O\,z_1$ étant perpendiculaire sur les deux autres. Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées d'un point quelconque M de la fibre moyenne.

L'effet du levier sur l'extrémité B se réduit à l'action des forces $(-N)$, $(-F)$, $+L$, dirigées parallèlement aux trois axes de coordonnées; mais l'action de la composante L peut être négligée, si l'on admet que l'inclinaison de l'hélice soit très faible, par rapport à un plan perpendiculaire à son axe ou à $O\,x_1$. Dans cette hypothèse, les plans des sections normales du ressort peuvent être considérés comme passant par l'axe $O\,x_1$, le plan de courbure de l'élément M devient perpendiculaire à cet axe et, par suite, la ligne $M\,y$, tangente en M à l'hélice, et l'intersection $M\,z$ du plan de la section en M et du plan de courbure se trouvent contenues dans un plan perpendiculaire à l'axe du ressort.

Si nous comparons la fig. 12, pl. VI, avec celle qui nous a servi à établir la théorie générale, nous trouvons les relations:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\,(Y\,z - Z\,y) = N\,(r - y_1) + F\,z_1 = N\,r + (F\,z_1 - N\,y_1) \\ &\Sigma\,(Y\,x - X\,y) = 0 \\ &\Sigma\,(X\,z - Z\,x) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

r désignant la distance O B du point B à l'axe. Si l'on représente par R la longueur des bras de levier, sur lesquels agissent les deux composantes $\frac{1}{2}$ P du couple, on a:

$$\frac{1}{2}\,P\,R + \frac{1}{2}\,P\,R = N\,r \text{ ou } N\,r = P\,R$$

Par suite:

$$\Sigma\,(Y\,z - Z\,y) = P\,R + (F\,z_1 - N\,y_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les conditions, exprimées par la seconde et la troisième des équations (1) seront remplies si, dans les équations (8), page 91, on fait:

$$I_{\xi\zeta} = o, \qquad \beta = o \qquad \frac{d\,\Theta}{d\,s} = o$$

Avec $\beta = o$ et en tenant compte de la relation précédente (2), la seconde des équations (8) devient:

$$P\,R + F\,z_1 - N\,y_1 = \varepsilon\,\mu\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

où $\mu = I_\zeta$ représente le moment d'inertie d'une section du ressort, par rapport à un axe passant par le point M et parallèle à $O\,x_1$.

Si nous multiplions cette équation (3) par l'élément d'arc $d\,s_1$ de la spirale, et si nous prenons l'intégrale, pour la longueur entière des spires, comprises entre les points A et B, nous trouvons:

$$\int P\,R\,d\,s_1 + F\int z_1\,d\,s_1 - N\int y_1\,d\,s_1 = \varepsilon\,\mu\int\left(\frac{d\,s_1}{\varrho} - \frac{d\,s_1}{\varrho_0}\right)$$

Désignons par l la longueur totale des spires, par ν et η les coordonnées du centre de gravité du ressort entier, et par Θ l'angle dont l'axe $O\,x_1$ doit tourner pour que les forces intérieures développées fassent équilibre au couple extérieur; on aura dans ce cas, comme précédemment:

$$\int d\,s_1 = l, \quad \int z_1\,d\,s_1 = \nu\,l, \quad \int y_1\,d\,s_1 = \eta\,l, \quad \int\left(\frac{d\,s_1}{\varrho} - \frac{d\,s_1}{\varrho_0}\right) = \Theta$$

et nous trouverons, par suite:

$$[P\,R + F\,\nu - N\,\eta]\,l = \varepsilon\,\mu\,\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Le moment $F\,\nu - N\,\eta$ s'annule, lorsque les coordonnées ν et η sont égales à zéro, c'est-à-dire quand le centre de gravité de l'hélice se trouve sur l'axe du cylindre; ce qui ne peut être exact qu'autant que les points A et B, pendant l'enroulement du ressort, ne quitteraient pas la surface du cylindre de l'hélice; ces points devraient donc être ramenés vers le centre, par un mécanisme convenable, quand le ressort, en se contractant, prend un diamètre plus petit; ils devraient, au contraire, être écartés quand le ressort se déroule. Cette remarque a son importance, lorsqu'il s'agit d'appliquer des ressorts de ce genre aux mécanismes d'horlogerie. En effet, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer page 123, les oscillations ne peuvent être isochrones que si l'angle de rotation Θ est proportionnel au moment de torsion $P\,R$. Si

le ressort comporte un grand nombre de spires et si sa variation de diamètre n'est pas trop considérable, le centre de gravité de l'hélice tombe assez près de l'axe pour qu'on puisse négliger $F \nu - N \eta$ devant $P R$ et avoir, par suite:

$$P R l = \varepsilon \mu \Theta$$

$$P R = \frac{\varepsilon \mu \Theta}{l}, \qquad \Theta = \frac{P R l}{\varepsilon \mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Ces équations, combinées avec l'équation (3), donnent:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{\Theta}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

relation qui détermine le rayon ϱ du ressort, après la torsion; on trouve également:

$$\varrho_0 - \varrho = \varrho_0 \frac{\frac{\Theta}{l}}{\frac{1}{\varrho_0} + \frac{\Theta}{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Si on désigne par σ la tension, par unité de surface, qui se produit à la surface extérieure du ressort soumis à la torsion, on a:

$$P R = \sigma E \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Pour une lame à section circulaire:

$$E = \frac{\pi}{32} d^3, \qquad \mu = \frac{\pi}{64} d^4$$

Pour une section rectangulaire:

$$E = \frac{1}{6} b h^2, \quad \mu = \frac{1}{12} b h^3$$

On a, par conséquent, pour un ressort à section circulaire:

$$P R = \frac{\pi}{64} \varepsilon \frac{d^4}{l} \Theta = \frac{\pi}{32} \sigma d^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

pour un ressort à section rectangulaire:

$$P R = \frac{\varepsilon}{12} b h^3 \frac{\Theta}{l} = \frac{\sigma}{6} b h^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Pour une section quelconque, on a la relation:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{\Theta}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Câbles.

Câbles en chanvre.

Disposition. — Les câbles en chanvre sont employés pour une foule d'opérations et principalement pour l'élévation des fardeaux. La méthode suivie pour leur fabrication est ordinairement la suivante: on commence par préparer un certain nombre de cordons (généralement 6) qu'on réunit et qu'on soumet, à la torsion, de manière à former ce qu'on appelle un toron. Un certain nombre de ces torons (le plus souvent 6), réunis et soumis également à une action de torsion, constituent un câble. Nous n'avons pas d'ailleurs à nous occuper ici de la question de fabrication mécanique des câbles et de l'outillage plus au moins compliqué qu'elle comporte.

Résistance. — La résistance d'un câble préparé, comme nous venons de l'indiquer, varie avec un grand nombre de circonstances; elle dépend: 1°. De la résistance des fibres élémentaires du chanvre. 2°, Du nombres de ces fibres qui entrent dans une section du câble. 3°, Des soins plus ou moins grands apportés à la fabrication.

La résistance des fibres élémentaires est elle-même fonction de la qualité du chanvre et des variations qu'elle subit par l'usage et sous l'influence de diverses causes, dont les principales tiennent à l'action de l'eau et de l'air. En d'autres termes un câble neuf, en chanvre de bonne qualité et d'une fabrication soignée, présente une résistance notablement supérieure à celle d'un câble qui a longtemps servi et qui a plus au moins subi d'altération, sous l'influence de l'atmosphère. On comprend d'après cela qu'il ne pourrait être question ici d'établir des formules ou des règles rigoureuses pour le calcul des câbles en chanvre; elles ne présenteraient d'ailleurs aucun intérêt et il suffit évidemment de connaître la résistance des câbles qui peuvent être regardés comme étant dans de bonnes conditions d'emploi.

Le chiffre admis généralement pour la résistance absolue des câbles en chanvre est de 510 kilogrammes par centimètre carré.

Diamètre des câbles. — Dans la plupart des applications, un câble peut travailler sans danger jusqu'au quart ou au cinquième de la charge de rupture; chaque centimètre carré peut

donc être soumis à une charge de $\frac{510}{5} = 102$ kilogrammes. Dans ces conditions, le diamètre d d'un câble, destiné à supporter une charge P, est donné par la relation:

$$\frac{\pi d^2}{4} 102 = P$$

d'où:

$$d = 0.113 \sqrt{P}.$$

Le tableau suivant contient un certain nombre de résultats, calculés d'après cette formule:

P en kilogr.	d en centimètres	P en kilogr.	d en centimètres	P en kilogr.	d en centimètres
28	0.6	377	2.2	1125	3.8
50	0.8	449	2.4	1248	4.0
78	1.0	527	2.6	1376	4.2
112	1.2	610	2.8	1509	4.4
153	1.4	702	3.0	1650	4 6
200	1.6	798	3.2	1797	4.8
252	1.8	902	3.4	1950	5.0
312	2.0	1010	3.6	2109	5.2

Durée des câbles. — La durée des câbles est très variable avec les conditions dans lesquelles on les emploie. Dans les locaux secs ils peuvent servir très longtemps, c'est-à-dire plusieurs années, tandis qu'exposés à l'humidité ils se détériorent très rapidement. Ainsi, par exemple, dans les puits de mines, un câble en chanvre résiste rarement plus de quatre à six mois; comme cette usure rapide augmente notablement les frais d'extraction, on a trouvé avantage, dans la plupart des mines, à recourir à l'emploi des câbles métalliques.

Câbles plats. — Les câbles ronds, lorsqu'ils atteignent de grands diamètres, présentent une assez grande résistance à la flexion et exigent par suite des tambours d'un grand rayon. C'est pour ce motif qu'on préfère dans certains cas les câbles plats, obtenus en juxtaposant et en reliant entre elles un certain nombre de tresses.

Câbles métalliques.

Description. — La faible durée que présentent les câbles en chanvre pour certaines installations, et en particulier pour le

service d'extraction dans les puits de mines, a conduit à leur substituer des câbles métalliques, dont le mode de préparation est analogue à celui que nous avons indiqué précédemment avec l'emploi du chanvre. Un câble métallique se compose d'un certain nombres de torons (généralement six), formés eux-mêmes par la réunion de six fils de fer. Chaque toron, ainsi que le câble lui-même, est muni d'une âme en chanvre goudronnée, interposée au milieu des fils, et qui a pour résultat de les empêcher de se rouiller, et de frotter les uns contre les autres.

Les fig. 1 et 2 pl. VII représentent, la première une vue extérieure, la seconde une coupe transversale d'un câble métallique.

Résistance. — La résistance que présente un câble de cette nature dépend naturellement de la résistance de la matière dont les fils sont formés et de la surface totale des sections de tous ces fils; dans les calculs on a l'habitude de négliger la résistance des âmes en chanvre.

Si on désigne par:

P, la charge que doit supporter un câble métallique,

δ, le diamètre d'un fil,

d, le diamètre du cercle circonscrit au câble,

A, la tension par unité de surface à laquelle on peut soumettre la matière des fils.

i, le nombre des fils qui composent le câble,

on a:

$$P = i \frac{\delta^2 \pi}{4} A \quad \text{d'où} \quad \delta = \sqrt{\frac{4 P}{i \pi A}}$$

La résistance absolue du fil de fer est, d'après le tableau de la page 95, de 7000 kilogrammes; dans les câbles on peut sans inconvénient faire travailler la matière jusqu'au cinquième de la charge de rupture; d'un autre côté, comme dans la plupart des cas, le nombre total des fils est de 36, il en résulte qu'en posant $i = 36$, $A = \frac{7000}{5} = 1400$, la formule précédente donne:

$$\delta = \frac{1}{200} \sqrt{P}.$$

Le diamètre du cercle circonscrit au câble est égal à dix fois celui d'un fil; on a donc:

$$d = 10\,\delta = \frac{1}{20}\sqrt{P}.$$

Si l'on compare cette expression à celle que nous avons donnée page 129, pour les cordes en chanvre, on voit que, à charge égale, le diamètre d'un câble en fil de fer n'est que la moitié de celui d'une corde en chanvre.

Chaines.

Chaines ordinaires sans étançons.

Nous ne nous occuperons ici que des chaines à anneaux elliptiques qu'on emploie, pour remplacer les cables, lorsqu'il s'agit de soulever des charges très considérables. L'action d'un poids, suspendu à l'extrémité d'une chaine, produit sur tous les chainons une déformation; chacun d'eux s'allonge dans la direction de la charge et se rétrécit dans le sens perpendiculaire; il se produit, par conséquent, en tous les points, des variations de courbure. En vertu de la symétrie que présente un chainon par rapport à deux axes rectangulaires, nous pouvons le supposer coupé en A et B (fig. 4, pl. VII) et nous borner à l'étude du quadrant elliptique A B, à la condition de supposer la section A encastrée et la section B soumise à une force $\frac{1}{2}$ P et à une couple M_1, dont l'action soit précisément équivalente à celle des efforts moléculaires qui s'y développent sous l'influence de la charge. Le chainon en effet, du point A au point B, éprouve non seulement un effet d'extension, mais encore des variations de courbure et, pour la section B en particulier, la flexion correspond à un couple, dont il faut nécessairement tenir compte, dans l'établissement des conditions d'équilibre du quadrant.

La fig. 3, pl. VII représente, à une plus grande échelle, un quart de chainon. Désignons par:

$A\,m_0\,B_0$, la fibre moyenne de ce quadrant elliptique, à l'état naturel,

A m B, la même ligne, après la déformation,

$A\,C = a$, $C\,B = b$, les demi-axes de cette seconde ligne,

x_0, y_0, les coordonnées d'un point quelconque m_0 de la fibre moyenne primitive,

$A\,n = x$, $m\,n = y$, les coordonnées de la position m prise par ce point, après la déformation.

ρ_o et ρ, les rayons de courbure de la fibre moyenne, en m_o et en m, à l'état naturel et après la déformation,

φ_o et φ, les angles que font, avec l'axe des x, les tangentes aux courbes en m_o et m,

μ, le moment d'inertie d'une section quelconque de la pièce, par rapport à une axe, passant par le centre de gravité de cette section et perpendiculaire au plan de la figure,

P, la charge qui agit sur la chaine et par suite $\frac{1}{2}$ P, la charge qui agit en B (en négligeant le poids même de la chaine),

S, la tension par unité de surface au point m,

M_1, la somme des moments de toutes les tensions et pressions qui se développent, lorsqu'on suppose le chainon chargé, mais non coupé,

M, la somme des moments de toutes les actions moléculaires développées dans la section m.

σ, la tension par unité de surface en un point p de la section m, situé dans le plan de la figure, à une distance $m\,p = \zeta$ de la fibre moyenne,

σ_1, la tension, par unité de surface, au point q de la section m, le plus éloigné de la fibre moyenne,

$z = m\,q$, l'écartement des points où se produisent les tensions S et σ_1,

Ω, la section du chainon.

Ces notations établies, la théorie que nous avons donnée, page 51, pour la flexion d'une pièce, naturellement courbe, nous fournit:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\,\frac{P}{\Omega}\cos\varphi \pm \frac{M}{\mu}\,z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{P}{\Omega}\cos\varphi \pm \frac{M}{\mu}\,\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$M = \varepsilon\,\mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_o}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

expressions dans lesquelles on doit prendre le signe qui rend positif le second membre.

Dans le cas actuel, nous avons en outre:

$$M = M_1 + \frac{P}{2}\,(b - y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

et il s'agit de déterminer M_1, car, cette quantité une fois connue, les équations (1) et (2) nous donnent les différentes tensions nécessaires pour calculer la résistance d'un chainon. Cette détermination de la valeur de M_1 demande une attention spéciale.

Soient $d\,s_0$ la longueur naturelle d'un élément de fibre en m_0, et $d\,s$ la longueur du même élément, après la déformation, on a:

$$d\,s_0 = \varrho_0\,d\,\varphi_0, \qquad d\,s = \varrho\,d\,\varphi$$

et par suite:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{d\,\varphi}{d\,s} - \frac{d\,\varphi_0}{d\,s_0}$$

En négligeant l'allongement de la fibre moyenne et en posant, par conséquent, $d\,s_0 = d\,s$, cette relation devient:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{d\,\varphi - d\,\varphi_0}{d\,s}$$

d'où l'on tire:

$$\varphi - \varphi_0 = \int\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) d\,s$$

et, en remplaçant $\frac{1}{\varrho}$ et $\frac{1}{\varrho_0}$ par leurs valeurs tirées des équations (3) et (4):

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon\,\mu}\int\left[M_1 + \frac{P}{2}\,(b - y)\right] d\,s \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Mais, pour les points B et B_0, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, donc $\varphi - \varphi_0 = 0$. Si nous prenons l'intégrale pour tout le quadrant, la valeur de cette intégrale devra être nulle, nous aurons donc:

$$0 = \int_0^l \left[M_1 + \frac{P}{2}\,(b - y)\right] d\,s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

l désignant la longueur totale de l'arc elliptique; on tire de là:

$$M_1 = -\frac{\frac{P}{2}\int_0^l (b - y)\,d\,s}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

expression qui détermine M_1.

Comme, dans les chainons, les axes a et b sont assez peu différents, on peut, pour le calcul des intégrales $\int y\,d\,s$ et $\int d\,s$,

remplacer l'ellipse par un demi-cercle de rayon $\frac{a+b}{2}$; on trouve alors:

$$\int_0^1 y\, d s = \frac{(a+b)^2}{2} \qquad \int_0^1 d s = (a+b)\frac{\pi}{4}$$

Et, par suite, pour la valeur approchée de M:

$$M_1 = -\frac{P}{2}\,\frac{b\,(a+b)\frac{\pi}{4} - \frac{(a+b)^2}{4}}{(a+b)\frac{\pi}{4}}$$

ou

$$M_1 = -\frac{P}{2}\left[b - (a+b)\frac{1}{\pi}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

En remplaçant M_1 par cette valeur, l'équation (4) donne:

$$M = -\frac{P}{2}\left[b - (a+b)\frac{1}{\pi}\right] + \frac{P}{2}\,b - \frac{P}{2}\,y$$

ou

$$M = \frac{P}{2}\left[(a+b)\frac{1}{\pi} - y\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (1):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\,\frac{P}{\Omega}\cos\varphi \pm \frac{P\,z}{2\,\mu}\left[(a+b)\frac{1}{\pi} - y\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

En désignant par d le diamètre du fil du chainon, on a:

$$\Omega = \frac{\pi\, d^2}{4}, \qquad \frac{\mu}{z} = \frac{\pi}{32}\, d^3$$

Par conséquent:

$$\sigma_1 = \left\{\frac{2}{\pi}\cos\varphi \pm \frac{16}{\pi}\left[\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right)\frac{1}{\pi} - \frac{y}{d}\right]\right\}\frac{P}{d^2} \quad . \quad . \quad (11)$$

Pour déterminer, à l'aide de cette équation, la section où se produit le maximum de tension, ainsi que la grandeur de cette tension, il convient de recourir au tracé de la fibre moyenne du chainon. Nous verrons plus tard que l'ellipse, la plus convenable à adopter, doit avoir pour valeur des demi-axes, $a = 1{,}80\ d$, $b = 1{,}25\ d$. Traçons cette ellipse et déterminons, pour un certain nombre de ses points, les valeurs de $\cos.\varphi$ et de $\frac{y}{d}$; à l'aide de l'équation (11), nous trouvons les résultats suivants:

pour $\varphi =$	90°	50°	27°	17°	0°
$\cos\varphi =$	0·000	0·6428	0·8910	0·9563	1·000
$\frac{y}{d} =$	0·000	0·6500	1·1000	0·2000	1·2500
$\sigma_1 \frac{d^2}{P} =$	4·9390	2·0385	0·7138	1·7798	2·0622

Dans ces calculs, la quantité $\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) \frac{1}{\pi} - \frac{y}{d}$ est positive pour $\varphi = 90°$ et $\varphi = 50°$; elle est négative, au contraire, pour les valeurs de φ égales à 27°, 17° et 0°; on doit donc prendre le signe + pour 90° et 50°, le signe — pour 27°, 17° et 0°.

Le tableau précédent montre: 1°, que le maximum de tension se produit pour $\varphi = 90°$, c'est-à-dire dans la section A; 2°, qu'entre $\varphi = 90°$ et $\varphi = 0°$, il se produit un minimum de tension qui correspond à $\varphi = 28°$ environ.

Pour $\varphi = 90°$ et $\frac{y}{d} = 0$, l'équation (11) donne:

$$d = \sqrt{\frac{16}{\pi^2 \sigma_1}\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right)} \sqrt{P} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Cette relation montre (ce qui du reste est évident à priori sans calcul), qu'il y a avantage à faire les chainons aussi petits que possible, en laissant simplement un jeu suffisant pour éviter le coïncement de deux anneaux engagés l'un dans l'autre. Il faut remarquer toutefois que, même en prenant $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ aussi petits que possible, les diamètres d donnés par la formule sont encore très grands et on peut, dès-lors, admettre pour limite des tensions celle qui correspond à la limite d'élasticité. La résistance absolue du fer d'excellente qualité, en barres minces, étant de 7000 kilogrammes et la tension correspondant à la limite d'élasticité étant égale à 0,4 de la résistance absolue, ou $0,4 \times 7000 = 2800$, il suffira donc de poser, dans l'équation (12), $\sigma_1 = 2800$, $\frac{a}{d} = 1,80$, $\frac{b}{d} = 1,25$ ce qui donnera:

$$d = 0{\cdot}042 \sqrt{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

En se servant de la dernière ligne horizontale du tableau précédent, on peut calculer les valeurs que devraient avoir les

diamètres des sections, aux différents points du profil elliptique, pour que le maximum de tension soit précisément égal à 2800 kilogrammes pour toutes ces sections, on trouve ainsi:

$$\text{pour} \quad \varphi = 90^0 \quad 50^0 \quad 27^0 \quad 17^0 \quad 5^0$$

$$\frac{d}{\sqrt{P}} = 0{\cdot}042 \quad 0{\cdot}027 \quad 0{\cdot}016 \quad 0{\cdot}025 \quad 0{\cdot}027$$

L'équation (9) indique que le moment de flexion M est positif, nul ou négatif, suivant qu'on a:

$$y < \frac{1}{\pi}(a + b), \quad y = \frac{1}{\pi}(a + b), \quad y > \frac{1}{\pi}(a + b).$$

Pour $y = \frac{1}{\pi}(a + b)$, $\varphi = 28^0$. Depuis le sommet A jusqu'au point pour lequel $\varphi = 28^\circ$, la tension a donc pour résultat d'augmenter la courbure; de ce point ($\varphi = 28^\circ$) jusqu'au point B, la courbure se trouve au contraire diminuée; enfin pour $\varphi = 28^\circ$, il ne se produit qu'un allongement uniforme, sans changement de courbure.

Dans certains ateliers de construction de chaines en fer, le diamètre du fil des chainons se trouve déterminé par la formule suivante:

$$d = 0{\cdot}052 \sqrt{P}$$

Cette formule donne une sécurité quadruple, c'est-à-dire que le maximum de tension n'atteint que le quart de la charge de rupture. Dans notre théorie, nous avons admis une sécurité plus faible qui nous parait suffisante. Le tableau suivant donne les dimensions des chainons, calculées, pour différentes valeurs de P, par la formule:

$$d = 0{\cdot}042 \sqrt{P}.$$

P en kilogr.	d en centimètres.	1.5 d	2.6 d	3·5 d	4·6 d	Poids par mètre courant en kilogr.
142	0.5	0.75	1.30	1.75	2.30	0.54
174	0.6	0.90	1.56	2.10	2.76	0.78
277	0.7	1.05	1.82	2.45	3.22	1.06
362	0.8	1.20	2.08	2.80	3.68	1.38
458	0.9	1.35	2.34	3.15	4.14	1.75
566	1.0	1.50	2.60	3.50	4.60	2.16
684	1.1	1.65	2.86	3.85	5.06	2.61
792	1.2	1.80	3.12	4.20	5.52	3.11
956	1.3	1.95	3.38	4.55	5.98	3.65
1109	1.4	2.10	3.64	4.90	6.44	4.23
1270	1.5	2.25	3.90	5.25	6.90	4.86
1449	1.6	2.40	4.16	5.60	7.36	5.53
1636	1.7	2.55	4.42	5.95	7.82	6.24
1834	1.8	2.70	4.68	6.30	8.28	7.00
2060	1.9	2.85	4.94	6.65	8.74	7.79
2264	2.0	3.00	5.20	7.00	9.20	8.64
2496	2.1	3.15	5.46	7.35	9.66	9.53
2739	2.2	3.30	5.72	7.70	10.12	10.45

Chaines avec étançons.

Si nous passons maintenant au cas des chaines étançonnées (fig. 5, pl. VII), nous devons remarquer qu'au point B (fig. 3), s'exercent non seulement les actions moléculaires que nous avons évaluées précédemment, mais encore une pression inconnue Y, dirigée suivant le petit axe de l'ellipse, et qui représente l'action de l'étançon sur le chainon.

Le moment M de toutes les forces extérieures, qui agissent sur la section faite en m, a alors pour expression:

$$M = M_1 + \frac{P}{2}(b - y) - Y(a - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ce qui peut se mettre sous la forme:

$$\varepsilon\,\mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = M_1 + \frac{P}{2}(b - y) - Y(a - x) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Si, comme nous l'avons déjà fait, nous posons approximativement:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} &= \frac{d\varphi - d\varphi_0}{ds} \\ dy - dy_0 &= (\varphi - \varphi_0)\,dx \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

L'équation (2), combinée avec la première des équations (3), nous donne:

$$\varepsilon\,\mu\,(d\varphi - d\varphi_0) = \left[M_1 + \frac{P}{2}(b - y) - Y(a - x)\right] ds$$

et

$$\varepsilon\,\mu\,(\varphi - \varphi_0) = \int\left(M_1 + \frac{P}{2}\,b - Y\,a - \frac{P}{2}\,y + Y\,x\right) ds$$

Ou

$$\varepsilon\,\mu\,(\varphi - \varphi_0) = \left(M_1 + \frac{P}{2}\,b - Y\,a\right)\int ds - \frac{P}{2}\int y\,ds + Y\int x\,ds \quad (4)$$

Si on calcule les intégrales, comme si le chainon avait la forme d'un cercle de rayon $r = \frac{a+b}{2}$, on peut poser:

$$y = r\sin\psi, \quad x = r\,(1 - \cos\psi), \quad s = r\,\psi.$$

Par suite:

$$\int_0^{\psi} ds = \int_0^{\psi} r\,d\psi = r\,\psi, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = r\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int y\,ds = \int_0^{\psi} r^2 \sin\psi\,d\psi = r^2\,(1 - \cos\psi) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,ds = r^2$$

$$\int x\,ds = \int_0^{\psi} r^2\,(1 - \cos\psi)\,d\psi = r^2\,(\psi - \sin\psi) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,ds = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

En substituant dans l'équation (4), on trouve:

$$\varepsilon\,\mu\,(\varphi - \varphi_0) = (M_1 + \frac{P}{2}\,b - Y\,a)\,r\,\psi - \frac{P}{2}\,r^2\,(1 - \cos\psi) + Y\,r^2\,(\psi - \sin\psi) \quad (5)$$

Si on prend les intégrales pour le quadrant elliptique tout entier, c'est-à-dire si on fait $\psi = \frac{\pi}{2}$, on a $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ et, par suite:

$$o = \left(M_1 + \frac{P}{2} b - Y a\right) r \frac{\pi}{2} - \frac{P}{2} r^2 + Y r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Ou

$$o = \left(M_1 + \frac{P}{2} b - Y a\right) \frac{\pi}{2} - \frac{P}{2} r + Y r \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \quad . \quad . \quad (6)$$

En introduisant dans la seconde des équations (3) la valeur de $\varphi - \varphi_o$, fournie par l'équation (5), on obtient:

$$d\,y - d\,y_0 =$$

$$\frac{1}{\varepsilon\,\mu}\left[\left(M_1 + \frac{P}{2} b - Y a\right) r\,\psi - \frac{P}{2} r^2 (1 - \cos\psi) + Y r^2 (\psi - \sin\psi)\right] r \sin\psi\, d\psi$$

Par suite:

$$y - y_0 = \frac{1}{\varepsilon\,\mu}\left\{\begin{aligned} &\left(M_1 + \frac{P}{2} b - Y a\right) r^2 \int \psi \sin\psi\, d\psi \\ &- \frac{P}{2} r^3 \int \sin\psi (1 - \cos\psi)\, d\psi \\ &+ Y r^3 \int \sin\psi (\psi - \sin\psi)\, d\psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Or, on a:

$$\int_o^{\psi} \psi \sin\psi\, d\psi = -\psi \cos\psi + \sin\psi, \qquad \int_o^{\frac{\pi}{2}} \psi \sin\psi\, d\psi = 1$$

$$\int_o^{\psi} \sin\psi (1 - \cos\psi)\, d\psi = -\cos\psi + \frac{1}{2}\cos^2\psi + \frac{1}{2}$$

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi (1 - \cos\psi)\, d\psi = +\frac{1}{2}$$

$$\int_o^{\psi} \sin\psi (\psi - \sin\psi)\, d\psi = -\psi\cos\psi + \sin\psi + \frac{1}{4}\sin 2\psi - \frac{1}{2}\psi$$

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi (\psi - \sin\psi)\, d\psi = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Si l'on prend les intégrales de $\psi = o$ à $\psi = \frac{\pi}{2}$, $y - y_0$ doit être nul, car l'addition de l'étançon a précisément pour effet d'em-

pêcher le chainon de se rétrécir dans le sens horizontal. On a donc, en tenant compte des valeurs précédentes des intégrales partielles:

$$o = \left(M_1 + \frac{P}{2} b - Y a\right) - \frac{P}{4} r + Y r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad . \; . \; . \quad (8)$$

Les équations (6) et (8) permettent de déterminer les valeurs de M_1 et de Y; on en tire:

$$Y = P \frac{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}}{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}} = 0{\cdot}457 \; P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$M_1 = \frac{P}{4} r - Y r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{P}{2} b + Y a$$

ou, en remplaçant Y par sa valeur et en réduisant:

$$M_1 = P \left(0{\cdot}1513 \, r - \frac{b}{2} + 0{\cdot}457 \, a\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Enfin, en substituant ces valeurs de Y et de M_1 et en mettant à la place de r, $\frac{a + b}{2}$, l'équation (1) donne:

$$M = P \left[0{\cdot}0756 \, (a + b) - \frac{y}{2} + 0{\cdot}457 \, x\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

La tension, par unité de surface, dans la section m au point q le plus éloigné de l'axe, est:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \frac{P \cos \varphi}{\Omega} \pm \frac{z}{\mu} M.$$

Ou, en remplaçant M par sa valeur tirée de la relation (11):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \frac{P \cos \varphi}{\Omega} \pm \frac{P z}{\mu} \left[0{\cdot}0756 \, (a + b) - \frac{y}{2} + 0{\cdot}457 \, x\right] \quad . \quad (12)$$

Si l'on pose ici encore, comme précédemment:

$$\Omega = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \frac{\mu}{z} = \frac{\pi d^3}{32}, \quad \frac{a}{d} = 1{\cdot}8, \; \frac{b}{d} = 1{\cdot}25$$

l'expression (12) devient:

$$\sigma_1 = \left[\frac{2}{\pi} \cos\varphi + \frac{16}{\pi}\left(0{\cdot}4612 - \frac{y}{d} + 0{\cdot}914\frac{x}{d}\right)\right]\frac{P}{d^2} \quad . \quad . \quad (13)$$

Si on trace la ligne d'axe du chainon, définie par les rapports normaux $\left(\frac{a}{d} = 1{\cdot}80, \frac{b}{d} = 1{\cdot}25\right)$, si on prend plusieurs points de cette courbe et qu'on cherche les valeurs correspondantes de φ, $\frac{y}{d}$ et $\frac{x}{d}$, l'équation (13) fournit les résultats suivants:

pour	$\varphi = 90°$,	50°	27°	17°	0°
$\frac{\sigma_1 d^2}{P}$	$= 2{\cdot}348$	0·5644	1·147	2·664	4·998

Ce tableau montre que, dans les chainons munis d'étançons, le maximum de tension ne se produit pas au point A, mais au point B et que la tension passe par un minimum en un point compris entre A et B et qui correspond à peu près à $\varphi = 50°$. Comme l'épaisseur doit être calculée d'après le maximum de tension, il en résulte qu'on doit poser:

$$\frac{\sigma_1 d^2}{P} = 4{\cdot}998$$

en prenant, comme précédemment, $\sigma_1 = 2800$ kilogrammes, on arrive à la formule:

$$d = \sqrt{\frac{4{\cdot}998}{2800}}\sqrt{P} = 0{\cdot}042\sqrt{P}.$$

On trouve ainsi, pour le diamètre du fil des chainons, exactement la même valeur que dans le cas des chaines sans étançons. Notre théorie nous conduit donc à cette conclusion que l'addition des étançons ne présente aucun avantage dans le cas des chainons elliptiques.

Chainons à profils rhomboïdal et allongé. — Les recherches précédentes montrent que la forme elliptique permet aux chainons des déformations trop considérables et que, par suite, ces pièces, pour une section donnée, présentent une résistance notablement plus faible que si elles étaient soumises à un simple effort de traction. Les meilleures formes pour les chainons sont donc évidemment celles dans lesquelles il ne peut guère se produire que des allongements et pas de déformations sensibles. Cette propriété se trouve à peu près complétement réalisée dans les

profils représentés par les fig. 10 et 11, pl. VII. Dans la fig. 10, les parties $a\ a_1$ sont limitées par des arcs de cercle, dont le plus petit est légèrement supérieur à celui du fil, qui forme le chainon; elles se prolongent par des parties droites $a\ b$, $a_1\ b_1$, raccordées entre elles par des arcs de cercle $b\ b$, $b_1\ b_1$ d'assez grand rayon; enfin c est un étançon, pièce indispensable pour cette forme de chainons.

Dans la forme représentée par la fig. 11, le profil se compose de demi-cercles, réunis par des lignes droites; le rayon du cercle intérieur est, comme dans la forme précédente, légèrement supérieur à celui du fil du chainon; quant à l'étançon, il ne présente dans ce cas aucune utilité.

Pour la fabrication de ces chaines, on fait usage d'une presse à étamper. Chaque chainon est soumis à chaud à une pression énergique dans une matrice, qui lui donne sa forme définitive.

A notre connaissance il n'a pas été fait d'expériences directes sur la résistance de ces chaines; mais il est naturel de chercher à déterminer la charge qu'on peut leur faire supporter, d'après leur résistance absolue. Si on admet, dans les calculs, une tension de 800 kilogrammes par centimètre carré, on a, pour déterminer le diamètre d de la section:

$$2\,\frac{\pi\,d^2}{4}\,800 = P$$

$$d = 0{\cdot}028\,\sqrt{P}.$$

Crochets de câbles et de chaines.

Les crochets de chaines ou de câbles, tels qu'on les fait ordinairement, sont le plus souvent trop faibles au milieu de la partie courbée et il en résulte que ces pièces ont une tendance à se déformer ou même à se rompre sous l'action de la charge. Nous allons chercher à déterminer la forme qu'il convient de donner à un crochet pour que toutes ses sections travaillent également.

Supposons, que la fig. 6, pl. VII, représente la forme théorique d'égale résistance d'un crochet; admettons que la courbe intérieure A G D B soit un arc de cercle et que, de plus, toutes les sections normales soient des cercles, dont les centres se trouvent tous sur la ligne A H E B.

Désignons par:

r = C D, le rayon de la courbe intérieure du crochet,

φ = F C B, l'angle d'une section normale quelconque C F avec la direction B C de la charge,

y = F D, le diamètre de la section D F,

Q, la charge suspendue au crochet,

σ, la tension par unité de surface au point D.

En vertu de l'équation (5), page 50, on a, pour déterminer σ, la relation:

$$\sigma = \frac{Q \sin \varphi}{y^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{Q \left(r + \frac{y}{2}\right) \sin \varphi}{\frac{\pi}{32} y^3} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

d'où on tire:

$$\sin \varphi = \frac{\sigma \pi}{16 Q} \frac{y^3}{2 r + 1{\cdot}25 y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si on considère σ comme une quantité constante, cette équation détermine une forme de crochet, dans laquelle tous les points de la courbe intérieure se trouvent soumis à la même tension. Pour tracer le profil correspondant, il suffit de donner à y une série de valeurs et de calculer, à l'aide de l'équation (2), les valeurs de $\sin \varphi$ ou de φ. Cela fait, on décrira le cercle intérieur de rayon r, on portera les angles φ calculés et, sur les directions ainsi déterminées, les valeurs correspondantes de y; le profil extérieur s'obtiendra en réunissant par une ligne continue les points tracés de cette manière.

L'équation (2) peut encore s'écrire:

$$\sin \varphi = \frac{\sigma \pi}{16} \frac{r^2}{Q} \frac{\left(\frac{y}{r}\right)^3}{2 + 1{\cdot}25 \left(\frac{y}{r}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Si on donne à $\frac{r^2}{Q}$ une valeur constante, tous les crochets qu'on obtiendra, en faisant varier la valeur de r, seront des pièces géométriquement semblables. Lors donc qu'on aura une première fois construit exactement un de ces crochets, il suffira de tracer des figures semblables pour obtenir, dans tous les cas, des formes satisfaisantes. Par ce motif on est donc naturellement conduit à admettre, pour les crochets de ce genre, la constance du rapport $\frac{r^2}{Q}$.

Pour les crochets de câbles, il convient de donner au diamètre $2r$ une valeur égale à deux fois le diamètre du câble. Comme, d'après la règle que nous avons établie, page 129, un câble, destiné à supporter une charge Q, doit avoir pour diamètre $0{,}113 \sqrt{Q}$, il en résulte que pour les crochets de câbles en chanvre, nous prendrons:

$$r = 0{\cdot}113 \sqrt{Q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Pour les crochets simples de chaines, on peut prendre le diamètre $2r$ de la courbure intérieure égal à trois fois le diamètre du fil d'un chainon. Ce diamètre étant égal à $0{,}042 \sqrt{Q}$, d'après la régle indiquée, page 136, il en résulte que, pour les crochets de chaines simples, nous prendrons:

$$r = 0{\cdot}063 \sqrt{Q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Pour les crochets doubles, chacune des parties courbes supporte la moitié de la charge; nous devrons donc poser:

$$r = 0{\cdot}063 \sqrt{\frac{Q}{2}} = 0{\cdot}0445 \sqrt{Q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Nous aurons donc, en définitive:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pour les crochets de câbles} \; . \; . \; . \; . & \frac{r^2}{Q} = (0{\cdot}113)^2 = \frac{1}{81} \\ \text{Pour les crochets de chaines (simples)} & \frac{r^2}{Q} = (0{\cdot}063)^2 = \frac{1}{256} \\ \text{Pour les crochets de chaines (doubles)} & \frac{r^2}{Q} = (0{\cdot}0445)^2 = \frac{1}{512} \end{array}\right\} \; . \; . \quad (7)$$

En s'imposant la condition que les crochets présentent la même sécurité que les chaines ou les câbles, nous devrons prendre:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pour les crochets de chaines} & \sigma = 0{\cdot}4 \times 7000 = 2800 \\ \text{Pour les crochets de câbles} & \sigma = \frac{1}{5} \times 7000 = 1400 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \quad (8)$$

Nous aurons, par suite, en vertu de l'équation (3):

$$\text{Pour les crochets de câbles} \; . \; . \; . \; . \quad \sin \varphi = 3{\cdot}40 \frac{\left(\frac{y}{r}\right)^2}{2 + 1{\cdot}25 \left(\frac{y}{r}\right)}$$

Pour les crochets de chaines (simples), $\sin \varphi = 2{\cdot}15 \dfrac{\left(\frac{y}{r}\right)^2}{2 + 1{\cdot}25 \left(\frac{y}{r}\right)}$

Pour les crochets de chaines (doubles), $\sin \varphi = 1{\cdot}07 \dfrac{\left(\frac{y}{r}\right)^2}{2 + 1{\cdot}25 \left(\frac{y}{r}\right)}$

Expressions qui permettent de déterminer les profils des crochets; nous nous bornerons ici à calculer la section maximum J G.

Si on pose $J\,G = \varDelta$, on doit avoir $\sin \varphi = 1$ pour $\frac{y}{r} = \frac{\varDelta}{r}$

On a, par suite:

Pour les crochets de câbles . . . . $\varDelta = 0{\cdot}982\ r = 0{\cdot}111 \sqrt{Q}$

Pour les crochets de chaines (simples), $\varDelta = 1{\cdot}160\ r = 0{\cdot}073 \sqrt{Q}$

Pour les crochets de chaines (doubles), $\varDelta = 1{\cdot}540\ r = 0{\cdot}0685 \sqrt{Q}$

Dans le tableau indiqué ci-dessous, les chiffres ont été calculés en partant d'hypothèses un peu différentes de celles que nous venons d'admettre. Ainsi, par exemple, pour les crochets de câbles, tout en continuant à prendre $\sigma = 1400$ kilogr., on a supposé que le diamètre $2\ r$ de la courbure intérieure n'était qu'une fois et demie le diamètre du câble.

Pour les crochets de chaines, $\sigma = 2800$ kilogr., et le diamètre $2\ r$ du vide intérieur a été supposé égal à deux fois le diamètre du fil des chainons.

Désignation.	Unités.	Rayon r de la courbure intérieure.	Epaisseur maximum $\varDelta$ du crochet.	Diamètre de la partie droite du crochet.
Crochets pour câbles .	Diamètre du câble.	0·75	0·91	0·50
Crochets simples pour chaines	Diamètre de la section des chainons.	1·00	1·61	1·00
Crochets doubles pour chaines	Diamètre de la section des chainons.	0·71	1·49	1·00

Assemblages par boulons.

Le mode de liaison qu'il convient d'adopter pour réunir deux pièces dépend principalement du mode d'action des forces appliquées à ces pièces. Ces forces, en effet, peuvent tendre simplement à les presser l'une contre l'autre ou, au contraire, à les écarter l'une de l'autre, normalement aux surfaces de jonction, ou enfin à les faire glisser l'une sur l'autre. Dans le premier cas, le mode d'assemblage doit avoir simplement pour but de s'opposer à l'action des forces accidentelles qui pourraient tendre à modifier la position relative des pièces, et, dans la plupart des cas, le frottement seul des surfaces en contact suffit pour assurer ce résultat. Dans le second cas, on a recours à l'emploi des rivets et des boulons; enfin, dans le troisième, l'emploi des rivets et des boulons suffit généralement, pour assurer la liaison; toutefois, si les forces qui tendent à produire le glissement ont une grande intensité, il est préférable d'engager les deux pièces l'une dans l'autre, de telle sorte que les rivets et les boulons soient employés uniquement à maintenir le contact des surfaces de jonction, tandis que le glissement se trouve empèché par la disposition même des pièces l'une par rapport à l'autre.

Nous commencerons par étudier l'assemblage de deux pièces au moyen de boulons, et nous supposerons que les forces agissant sur ces pièces tendent à les séparer normalement à la surface de contact.

Considérons, par exemple, deux plaques A et B (fig. 7, pl. VII), sollicitées par deux forces P et P, qui tendent à les séparer l'une de l'autre et supposons qu'il s'agisse de relier ces pièces par des boulons. Nous devons tout d'abord faire remarquer que les différentes dimensions de ce mode d'assemblage ne sauraient toutes être déterminées par le calcul et qu'il convient, pour quelques unes d'entre elles, de recourir aux résultats de l'expérience.

La longueur du boulon C est déterminée par la somme des épaisseurs des deux plaques: quant à sa section, elle doit naturellement être proportionnelle à la force P et, par suite, son diamètre doit être proportionnel à la racine carrée de cette force.

En comparant les dimensions et le nombre des boulons d'assemblage sur un grand nombre de cylindres à vapeur, j'ai été amené à reconnaitre que ces pièces ne supportent en général qu'une tension de 100 kilogrammes par centimètre carré, c'est-à-

dire qu'on ne les fait travailler qu'à $\frac{100}{4000} = \frac{1}{40}$ environ de leur résistance absolue; les observations faites sur des assemblages de même nature dans d'autres appareils m'ont donné des résultats identiques. Nous pouvons dès lors établir, comme règle, que, dans les assemblages ordinaires par boulons, il convient de ne pas dépasser, pour les boulons, la tension de 100 kilogrammes par centimètre carré; ce qui revient à poser:

$$\frac{\pi d^2}{4} \times 100 = P \quad \text{d'où} \quad d = \frac{1}{9} \sqrt{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Toutes les autres dimensions de l'assemblage, notamment celles de la tête du boulon, du filet et de l'écrou doivent être déterminées par expérience.

En ce qui concerne les dimensions du filet, il importe tout d'abord de remarquer qu'elles ne doivent pas rester géométriquement semblables pour les grands et pour les petits boulons. Admettons, en effet, qu'un boulon de deux centimètres de diamètre ait un filet dont les dimensions soient complètement satisfaisantes; si on construit deux autres boulons géométriquement semblables, mais dont l'un soit quatre fois plus petit et l'autre quatre fois plus grand, il est facile de reconnaitre que le filet sera trop faible dans le premier, trop fort, au contraire, dans le second. En d'autres termes, pour de petits boulons, le filet doit être relativement plus fort, par rapport au diamètre, que pour des boulons de grandes dimensions, et c'est effectivement ce qui se vérifie dans les machines bien construites. Whitworth est le premier qui ait cherché à formuler des régles empiriques pour la détermination du filet. Les nombreuses vérifications auxquelles j'ai soumis ces régles en ont fait ressortir certaines irrégularités. Par là j'ai été conduit à ne pas adopter directement ces régles, et à établir de préférence une loi empirique, reproduisant approximativement les dimensions des différents types de boulons de cet habile constructeur.

En désignant (fig. 8 et 9, pl. VII) par:
P, l'effort en kilogrammes, qui agit sur le boulon,
d, le diamètre de la tige de ce boulon,
d_1, le diamètre intérieur du filet de vis,
D_1, le diamètre du cercle, circonscrit à l'écrou à pan hexagonal,
h, la hauteur de l'écrou,
n, le nombre des filets, sur une longueur égale au diamètre d,

je suis arrivé aux formules empiriques suivantes qui, comme je viens de le dire, fournissent des dimensions peu différentes de celles qu'on trouve dans les types de Whitworth.

1°, Vis à filet triangulaire (fig. 8):

$$d = \frac{1}{9} \sqrt{P}$$

$$n = \sqrt[3]{48 + 168\, d}$$

$$d_1 = \frac{n-2}{n}\, d$$

$$D_1 = 0{\cdot}5 + 1{\cdot}4\, d$$

$$h = \frac{2}{3}\, D_1$$

2°, Vis à filet carré (fig. 9):

$$d = \frac{1}{9} \sqrt{P}$$

$$n = \frac{1}{2} \sqrt[3]{48 + 168\, d}$$

$$d_1 = \frac{n-1}{d}\, d$$

$$D_1 = 0{\cdot}5 + 1{\cdot}4\, d$$

$$h = D_1$$

Les résultats numériques donnés par ces formules sont indiqués dans le tableau ci-dessous:

P	d	n		d_1	D_1	h	
en kilogr.	en centimètres.	filet triangulaire.	filet carré.	en centimètres.	en centimètres.	filet triangulaire.	filet carré.
81	1.0	5.0	2.5	0.6	1.90	1.30	1.90
110	1.2	6.3	3.1	0.82	2.18	1.45	2.18
157	1.4	6.6	3.3	0 98	2.46	1.61	2.46
210	1.6	6.8	3.4	1 13	2.74	1.83	2.74
260	1.8	7.0	3.5	1.30	3.02	2.01	3.02
325	2.0	7.3	3.6	1.45	3.30	2.20	3.30
465	2.4	7.7	3.8	1.78	3.86	2.57	3.86
630	2.8	8.0	4.0	2.10	4.38	2.92	4.38
830	3.2	8.4	4.2	2.43	4.94	3.30	4.94
1040	3.6	8.7	4.4	2.77	5.50	3 70	5.50
1300	4.0	9.0	4.5	3.11	6.06	4.04	6.06
1560	4 4	9.2	4.6	3.43	6.62	4.41	6.62
1860	4.8	9.5	4 7	3.79	7.18	4.79	7.18
2180	5 2	9.7	4.8	4.12	7.74	5.15	7.74
2540	5.6	10.0	5.0	4.48	8.30	5.50	8.30
2916	6.0	10.2	5.1	4.82	8.86	5.91	8.86

Dans les ateliers de construction, pour ne pas avoir à recourir constamment aux formules ou aux tables, il convient d'avoir les dessins, en vraie grandeur, d'une série complète de boulons, tracés d'après les régles que nous venons d'indiquer ou d'autres analogues, et de se borner à reproduire ces types dans les différents dessins d'exécution.

Lorsqu'on veut dessiner les vis à petite échelle, on peut se contenter des valeurs moyennes suivantes:

Nombre des filets, sur une longueur égale au diamètre, $n = 8$

Diamètre intérieur du filet . . . . $d_1 = \frac{3}{4} d$

Hauteur de l'écrou . . . . $h = d$

Diamètre du cercle circonscrit à l'écrou . . . . . $D_1 = \frac{3}{2} d$

Rayon de la surface sphérique limitant l'écrou . . . $= 3 d$

Rayon de l'arc de cercle limitant chaque face hexagonale . . . . $= \frac{3}{2} d$

Types d'assemblages au moyen de boulons. — L'emploi des boulons, pour établir la liaison de deux pièces, se prête à des applications très variées; nous allons en donner quelques exemples (pl. VIII).

La fig. 2 représente l'assemblage d'une plaque avec une pièce de fonte au moyen de boulons d'ancrage. La tête de chaque boulon a la forme d'une ancre, dont les saillies viennent porter sur la pièce de fonte, lorsqu'on tourne l'écrou pour produire le serrage de la plaque.

La fig. 3 donne un mode d'assemblage de 3 pièces a, b, c au moyen d'un boulon. Ce boulon, qui est terminé à ses deux extrémités par deux parties filetées, porte, en un point intermédiaire, une partie saillante destinée à se loger dans la pièce comprise entre les deux autres.

L'écrou inférieur permet de serrer la pièce c sur la pièce b, de même que l'écrou supérieur assure la liaison de cette seconde pièce avec la première a. Une disposition de ce genre peut être employée, par exemple, pour relier un palier à sa plaque de fondation et fixer le chapeau sur le corps du palier; on peut ainsi supprimer entièrement les boulons qui, dans les modèles ordinaires, servent à fixer le corps du palier sur sa plaque de fondation et, par suite, ne donner qu'une longueur assez faible à cette plaque, avantage très précieux, lorsqu'on ne dispose pas d'un espace suffisant pour adopter la disposition ordinaire.

La disposition représentée par la fig. 4 est quelquefois employée dans les presse-étoupes; les deux boulons, fixés par leur tête sur des oreilles vissées sur le corps du presse-étoupes, servent à produire le serrage de la garniture.

Fig. 5. Boulon à clavette. Cette disposition est souvent employée pour relier une colonne métallique avec une plaque de fondation ou avec certaines pièces de charpente; on peut supposer, par exemple, que le corps a représente l'extrémité supérieure de la colonne et b la pièce de charpente; dans ce cas le boulon passe dans le vide de la colonne à laquelle il se trouve relié par la clavette c; le serrage de la pièce b sur la colonne s'obtient alors au moyen de l'écrou.

Fig. 6. Boulon à section carrée. On a souvent recours à cette disposition, pour empêcher que le boulon ne puisse tourner lorsqu'on agit sur l'écrou.

Fig. 7. Boulon fileté s'engageant dans le métal d'une des pièces à relier. Cet assemblage, où le boulon est vissé directement dans l'une des pièces, est usité toutes les fois qu'il n'est pas possible d'employer un boulon avec une tête; dans les boulons de ce genre on ménage d'ailleurs généralement deux faces planes parallèles, pour qu'on puisse les saisir avec une clef.

Fig. 8. Boulon à tête noyée. On n'a recours à cette disposition que dans le cas où il est indispensable que la tête du boulon ne soit pas en saillie sur la surface d'un des corps qu'il est destiné à relier. On peut remarquer que ce mode de liaison est très couteux, puisqu'il conduit à tourner la tête du boulon et à évider l'un des corps, de manière à obtenir deux surfaces coniques superposables.

Fig. 9. Boulon à ergot; l'addition de cette saillie a pour but d'empêcher le boulon de tourner, lorsqu'on agit sur l'écrou.

Fig. 10. Boulon destiné à relier une pièce métallique à une pierre de fondation. Lorsque le boulon ne peut pas ou ne doit pas traverser complètement la pierre, on assure sa liaison avec cette pierre de la manière suivante: la partie du boulon qui doit être engagée dans la pierre se compose d'un tronc de pyramide, dont les arêtes portent des entailles; on commence par introduire cette partie dans un évidement pratiqué dans la pierre et qui a également une forme pyramidale, on la cale au moyen de morceaux de fer et on finit par remplir avec du plomb fondu le vide existant entre le boulon et la pierre. Lorsque

le scellement du boulon est terminé, la fixation de la plaque métallique ne présente plus aucune difficulté.

Fig. 1. Boulons de fondation. Il arrive fréquemment, dans les fortes machines, que les bâtis ou d'autres organes doivent être fixés sur des massifs en pierre et il importe d'assurer, autant que possible, la liaison de ces pièces, non seulement avec l'assise supérieure, mais encore avec tout le massif de fondation. Une liaison de cette nature est indispensable en particulier pour les paliers des arbres de manivelles, et généralement dans tous les cas où les pièces qu'il s'agit de relier sont soumises à un effort K très considérable, agissant verticalement de bas en haut. Dans ces conditions, on ne peut évidemment arriver à une stabilité satisfaisante qu'à la condition de donner aux fondations un poids très notablement supérieur à la force K, et d'établir une véritable liaison entre la pièce soumise à cette force et le massif tout entier. On doit donc percer des trous sur toute la hauteur du massif, y descendre les tiges de boulons, en ayant soin de les munir à la partie inférieure de contre-plaques portant sur la dernière assise; il suffit alors de placer des clavettes à la partie inférieure et d'agir sur les écrous à la partie supérieure, pour assurer la liaison de la pièce métallique avec le massif. En d'autres termes, la masse tout entière du massif, traversée par les boulons, se trouve comprise entre deux plaques métalliques, dont la plus élevée est précisément celle qu'il s'agit de fixer sur ce massif.

Assemblage de plaques de fonte au moyen de boulons. Dans les assemblages de plaques de fonte, lorsqu'on veut obtenir à la fois une très grande exactitude et une très grande résistance, il est indispensable de satisfaire aux trois conditions suivantes: 1°, les surfaces par lesquelles les pièces doivent reposer l'une sur l'autre doivent être dressées avec le plus grand soin, au moyen du tour ou de la machine à raboter; 2°, les trous de boulons doivent être percés sur toute l'épaisseur des deux plaques, en ayant soin de superposer bien exactement leurs parties dressées; 3°. lorsque les deux plaques sont exposées à se déplacer, en glissant l'une sur l'autre, un simple serrage n'est pas suffisant et il convient de les disposer de manière à ce qu'elles s'engagent l'une dans l'autre.

La planche IX représente divers assemblages de ce genre.

Fig. 1. Assemblage simple. Les surfaces de contact des deux plaques se composent de deux portées bien dressées; sur

l'un des côtés ces deux plaques se raccordent de manière à former une surface plane. Ce mode d'assemblage n'est admissible que lorsque les plaques ne sont soumises à aucun effort tendant à les faire glisser l'une sur l'autre.

Fig. 3. Assemblage d'un bras de volant avec la jante. L'extrémité du bras se trouve engagée entre deux parties saillantes venues de fonte avec la jante. Toutes les surfaces par lesquelles les deux pièces doivent reposer l'une snr l'autre sont rabotées. Les boulons sont simplement destinés à réunir les deux pièces, tandis que les saillies s'opposent au glissement.

Fig. 2. Assemblage d'un bras de roue avec deux segments contigus de la jante. Sur les segments se trouvent deux épaulements, qui sont venus de fonte avec ces pièces et qui se trouvent saisis par l'extrémité du bras. Comme dans l'assemblage précédent, toutes les surfaces de contact sont dressées et les boulons servent simplement à la réunion des pièces, dont le déplacement relatif est empêché par les épaulements.

Fig. 4. Assemblage avec interposition de rondelle. Ce mode d'assemblage, qui est en général le meilleur qu'on puisse adopter, offre la disposition suivante: les plaques, dans les parties qui doivent être en contact, sont d'abord exactement dressées, puis on les superpose et on perce les trous de boulons. Cette opération terminée, on sépare de nouveau les plaques, on creuse, au moyen d'une fraise, les cavités destinées à recevoir la rondelle d'assemblage; il ne reste plus alors qu'à introduire cette rondelle dans l'une des plaques, à lui superposer la seconde, enfin à placer les boulons et à produire le serrage en agissant sur les écrous. Ce qui constitue principalement la supériorité de cet assemblage, c'est qu'il n'exige aucun travail à la main, avec le burin ou la lime.

Les fig. 5, 6, 7 et 8 représentent divers assemblages de réservoirs en fonte; ces formes ne sont admissibles que pour les réservoirs qui n'ont à supporter que des efforts de faible importance et qui ne sont assujettis qu'à la condition d'être snffisamment étanches, au point de vue des liquides qu'ils doivent renfermer.

Assemblages par rivures.

Rivets.

La tôle remplit aujourd'hui un rôle très important dans les applications industrielles; elle est, en effet, employée presque

exclusivement pour la fabrication des cuves, des tuyaux, des générateurs de vapeur, des gazomètres, des réservoirs d'eau, des navires, des poutres, des ponts métalliques etc. Le procédé de la rivure, employé pour assembler entre elles les plaques de tôle, a seul rendu possibles des applications aussi nombreuses et aussi variées et il mérite, par suite, une étude spéciale.

La réunion de deux feuilles de tôle, à l'aide de rivets, s'effectue ordinairement de la manière suivante: les feuilles sont percées sur leurs bords d'une série de trous équidistants, qu'on superpose exactement et à travers lesquels on fait passer les rivets destinés à produire la liaison. Chacun de ces rivets, forgé à l'étampe, est introduit, encore rouge, dans deux trous qui se correspondent, puis soumis à l'action d'un marteau, destiné à donner à la partie qui déborde la forme d'une tête hémisphérique ou conique.

La fig. 1, pl. X représente le rivet au moment où on vient de l'introduire à travers les tôles, la fig. 2 le représente terminé. La forme de la tête c s'obtient, soit avec des marteaux à main, soit avec des machines spéciales à river. Dans le premier cas, on doit faire reposer la tôle sur un appui fixe ou sontenir, à l'aide d'un marteau, la tête a du rivet, façonnée à l'avance, tandis qu'avec un second marteau, de forme convenable, on travaille la partie qui déborde la tôle pour arriver à former une seconde tête c. En dernier lieu on fait ordinairement usage d'un marteau à chasse, qui est destiné à la fois à rendre plus régulière la forme de la tête et à refouler les bords b dans la tôle elle même. Lorsque toute la ligne de rivets se trouve ainsi convenablement terminée, on effectue le mattage de chacune des tôles suivant les arêtes d.

Une bonne rivure doit remplir les conditions suivantes: 1°, les rivets d'une même ligne doivent se trouver convenablement espacés; 2°, les dimensions du corps du rivet, et de ses têtes doivent être en rapport avec l'épaisseur des tôles; 3°, les trous percés dans les plaques, pour recevoir les rivets, doivent coïncider rigoureusement; 4°, les rivets doivent remplir exactement ces trous.

Nous donnons un peu plus loin toutes les indications nécessaires pour déterminer les dimensions des rivets et leur écartement. Quant au perçage des tôles, il s'effectue ordinairement au moyen d'une machine à percer, qui est munie d'un mandrin en acier et qui agit sur ces tôles par emboutissage.

Pour les constructions d'une certaine importance, où l'on tient à avoir un assemblage aussi parfait que possible, on place les deux tôles l'une sur l'autre, dans la position qu'elles doivent présenter définitivement, et on perce alors les trous au moyen d'une machine à percer verticale. Ce n'est guère que de cette manière qu'on peut obtenir des trous parfaitements ronds, qui se correspondent exactement et dont les bords soient nets et sans bavures.

Pour que le rivet remplisse bien exactement le trou ainsi préparé, il convient de lui donner un diamètre tel qu'à froid il ne puisse entrer dans ce trou qu'avec un certain effort; il est évident alors que, dans ces conditions, le rivet, porté au rouge, ne pourra se placer dans sa position définitive que par l'action de coups de marteau vigoureux et suffisamment répétés.

Le diamètre des rivets et leur écartement se déterminent d'après les conditions auxquelles doit satisfaire la rivure. On doit en effet, dans certains cas, chercher surtout à obtenir pour l'assemblage une grande résistance au cisaillement; c'est ce qui se présente pour les poutres en tôle pleine ou en treillis, les ponts métalliques, etc.; dans d'autres cas, comme, par exemple, pour les gazomètres, on n'a guère à s'attacher qu'à l'étanchéïté du joint; enfin on peut avoir à réaliser à la fois ces deux conditions de résistance et d'étanchéïté, et c'est le cas des chaudières à vapeur, des navires en fer, etc.

Nous allons étudier successivement les conditions de résistance des différents modes de rivure.

Rivure simple de deux tôles. (Fig. 3 et 4, pl. X.) Soient U et O deux feuilles de tôle qu'il s'agit de réunir par une simple ligne de rivets et qui sont soumises à l'action de deux forces dirigées en sens contraire.

Désignons par:

δ, l'épaisseur des tôles,
d, le diamètre du corps d'un rivet,
e, (fig. 4), la distance des centres de deux rivets consécutifs,
e_1, la distance du bord d'un rivet au bord de la feuille de tôle,
f, le rapport entre la résistance de la tôle et celle de la rivure.

Si l'on imagine les tôles soumises à l'action des forces, la séparation des feuilles peut se produire de plusieurs manières: 1°, par une rupture des tôles entre les trous de rivets; 2°, par

un arrachement des rivets; 3°, par un déchirement des bords des tôles suivant les lignes a b.

Comme évidemment, dans une rivure bien disposée, aucun de ces trois accidents ne doit avoir plus de chances de se produire que les deux autres, et comme d'ailleurs nous avons admis que la résistance au cisaillement pouvait être prise égale à la résistance absolue, il en résulte que la section δ (e — d) de la tôle entre deux rivets doit être égale à la section $\frac{\pi d^2}{4}$ de chaque rivet, ainsi qu'à la section $2 e_1 \delta$, correspondant au déchirement des bords.

Nous avons, par suite:

$$\delta (e - d) = \frac{\pi d^2}{4} = 2 e_1 \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

d'où on tire facilement les relations:

$$\frac{e}{\delta} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$\frac{e_1}{\delta} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Telles sont les conditions qui doivent être remplies pour que la rivure présente la même résistance dans toutes ses parties. Quant à la quantité f, elle est évidemment déterminée par le rapport $\frac{e}{e - d}$. On a donc:

$$f = \frac{e}{e - d}$$

ou, en remplaçant e par sa valeur tirée de l'équation (2),

$$f = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\delta}{d}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$\frac{d}{\delta} = \frac{4}{\pi (f - 1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

L'équation (4) montre d'abord que la rivure est toujours plus faible que la tôle elle-même, car f est toujours supérieur à l'unité; elle indique, de plus, qu'au point de vue de la résistance, il y a avantage à donner au diamètre d du rivet une valeur assez grande par rapport à l'épaisseur de la tôle, puisque f est d'autant plus petit que $\frac{d}{\delta}$ est plus grand.

L'équation (2) montre d'ailleurs que la distance des rivets doit augmenter avec le rapport $\frac{d}{\delta}$. Il en résulte que, dans une rivure forte, où $\frac{d}{\delta}$ a une grande valeur, les rivets doivent être plus éloignés, que dans une rivure peu résistante, où la valeur de $\frac{d}{\delta}$ est plus faible.

Ce qui précède indique suffisamment comment on doit, suivant les cas, choisir le rapport $\frac{d}{\delta}$.

Lorsque, par exemple, il s'agit d'une rivure dans laquelle le point capital est la résistance au cisaillement, il est avantageux d'employer des rivets d'un fort diamètre, assez écartés les uns des autres.

Si, au contraire, il ne s'agit pas d'obtenir une grande résistance, mais simplement un joint bien étanche, il est préférable de recourir à l'emploi de rivets d'un faible diamètre, très rapprochés.

Enfin, lorsque l'assemblage doit satisfaire à la fois aux conditions de résistance et d'étanchéïté, on doit évidemment l'établir avec des rivets dont le diamètre et l'écartement aient des valeurs moyennes, comprises entre celles qui conviennent aux deux autres cas.

Les équations précédentes donnent les résultats suivants:

pour $\frac{d}{\delta}$ =	1·0	1·5	2	2·5	3
f =	2·27	1·85	1·64	1·51	1·42
$\frac{e}{\delta}$ =	1·78	3·26	5·14	7·41	10·06
$\frac{e_1}{\delta}$ =	0·39	0·88	1·56	2·44	3·51

En comparant les chiffres de ce tableau avec différentes rivures employées pour des chaudières, des navires, des gazomètres et des ponts métalliques, j'ai constaté qu'on pouvait admettre, dans la pratique, les valeurs suivantes:

$\frac{d}{\delta} = 2·5$, pour les assemblages qui n'exigent que de la résistance,

$\frac{d}{\delta} = 1·5$, pour ceux qui doivent donner un joint étanche,

$\frac{d}{\delta} = 2·0$, pour ceux où ces deux conditions doivent se trouver réunies.

Les résistances de ces trois rivures sont respectivement 0,7, 0,54 et 0,61 de la résistance de la tôle.

Quant à la distance e_1, il convient de remarquer qu'on doit lui donner une valeur un peu supérieure à celle qn'indique le calcul, car ce calcul ne fournit, à proprement parler, qu'un minimum de e_1; toutefois il ne faudrait pas tomber dans l'excès contraire et faire e_1 trop grand, parce qu'alors l'opération du mattage des tôles deviendrait trop difficile.

Rivures doubles et multiples. (Fig. 5 et 6, pl. X.) Pour qu'une rivure à double ligne de rivets présente, en tous ses points, une égale résistance, il faut évidemment que la section δ (e — d) de la tôle entre deux rivets d'une même ligne soit égale à la somme des sections de deux rivets, c'est-à-dire à $2 \frac{\pi d^2}{4}$, en admettant que la résistance de la matière au cisaillement soit égale à sa résistance absolue.

On a donc, pour une rivure double, la relation:

$$\delta (e - d) = 2 \frac{\pi d^2}{4},$$

d'où on tire:

$$\frac{e}{\delta} = \frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Le rapport des résistances est ici encore, comme précédemment, $f = \frac{e}{e - d}$ ou, en remplaçant e par sa valeur tirée de l'équation (6):

$$f = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\delta}{d}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Cette valeur de f, pour une même valeur du rapport $\frac{d}{\delta}$, est plus petite que celle fournie par l'équation (4), dans le cas d'une rivure simple; en d'autres termes, une rivure, à double ligne de rivets, donne, d'une manière générale, une résistance plus grande qu'une rivure simple. Des équations (6) et (7) on tire:

pour $\frac{d}{\delta}$ =	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0
$\frac{e}{\delta}$ =	2·6	5·0	8·3	11·3	14·1

$$\frac{1}{f} = 0{\cdot}60 \quad 0{\cdot}70 \quad 0{\cdot}75 \quad 0{\cdot}80 \quad 0{\cdot}83$$

Lorsque la rivure est composée de plus de deux lignes de rivets, qu'elle en comprend, par exemple, un nombre i, si on s'impose la condition que la résistance soit la même en tous les points, la section $\delta\ (e - d)$ de la tôle, entre deux rivets consécutifs d'une même file, doit être égale à la section d'un rivet multipliée par le nombre i et on devra poser, par suite:

$$\delta\ (e - d) = i\ \frac{\pi\ d^2}{4}$$

$$f = \frac{e}{e - d}$$

d'où on tire facilement:

$$\frac{e}{\delta} = \frac{d}{\delta} + i\ \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$f = 1 + \frac{4}{i\ \pi} \left(\frac{\delta}{d}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

L'équation (9) montre, que la résistance d'une rivure augmente avec le nombre des files de rivets et que d'ailleurs, quelque grande que soit la valeur donné à i, f ne peut jamais être égal à l'unité; en d'autres termes, la résistance de l'assemblage est toujours inférieure à celle de la tôle.

Comparaison d'une rivure simple et d'une rivure double. Proposons nous de déterminer le rapport qui existe entre les résistances de deux rivures, l'une simple et l'autre double, en admettant que le nombre des rivets employés dans les deux assemblages soit identiquement le même.

Désignons par d_1, e_1, f_1 les quantités qui, pour la rivure double, correspondent aux quantités d, e, f de la rivure simple; en vertu des équations (2) et (4), nous aurons:

$$\frac{e}{\delta} = \frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$f = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\delta}{d}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

et, en vertu des relations (6) et (7):

$$\frac{e_1}{\delta} = \frac{d_1}{\delta} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d_1}{\delta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$f_1 = 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\delta}{d_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Le nombre de rivets existant sur une longueur de 1 mètre (e et e_1 étant exprimés en centimètres) est $\frac{100}{e}$, pour la rivure simple, et $2\frac{100}{e_1}$ pour la rivure double; comme, par hypothèse, les deux assemblages comportent le même nombre de rivets, on doit avoir:

$$\frac{100}{e} = 2. \frac{100}{e_1}$$

ou

$$e_1 = 2\,e. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Si nous introduisons cette valeur de e_1 dans l'équation (12), nous trouverons pour $\frac{d_1}{\delta}$, en tenant compte de l'équation (10):

$$\frac{d_1}{\delta} = -\frac{1}{\pi} + \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \frac{4}{\pi}\,\frac{d}{\delta} + \left(\frac{d}{\delta}\right)^2} \quad \ldots \quad (15)$$

Cette équation détermine le diamètre d'un rivet de la rivure double; les équations (11) et (13) donnent d'ailleurs:

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\pi + 2\left(\frac{\delta}{d_1}\right)}{\pi + 4\left(\frac{\delta}{d}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Si, par exemple, on admet pour la rivure simple, $\frac{d}{\delta} = 2$, l'équation (15) donne:

$$\frac{d_1}{\delta} = -\frac{1}{3{\cdot}14} + \sqrt{\left(\frac{1}{3{\cdot}14}\right)^2 + \frac{4 \times 2}{3{\cdot}14} + 4} = 2{\cdot}26$$

et la relation (16) devient:

$$\frac{f_1}{f} = 0{\cdot}82$$

Ainsi donc, lorsque le nombre des rivets est le même et que, de plus, les deux assemblages offrent une résistance constante

dans toutes leurs parties, la résistance de la rivure double est à celle de la rivure simple, dans le rapport de $\frac{1}{0,82}$ à 1 ou de 1,22 à 1.

Il faut toutefois remarquer que la rivure double exige des rivets d'un diamètre un peu plus fort, puisqu'en supposant $\frac{d}{\delta} = 2$ nous avons trouvé $\frac{d_1}{\delta} = 2{\cdot}26$; cet excédant de dimensions entraine de plus un léger supplément de travail.

Mais la double rivure n'en doit pas moins être adoptée de préférence pour tous les assemblages destinés à résister à de fortes tensions.

Rivure avec bande de recouvrement. Fig, 7 et 8, pl. X. Dans ce mode d'assemblage, les tôles, au lieu d'être superposées, sont simplement juxtaposées, chacune d'elles étant rivée sur une bande de tôle, qui recouvre le joint; grâce à cette disposition, les deux feuilles forment, d'un côté, une surface plane continue, ce qui, dans certains cas, est avantageux et même souvent indispensable. Si les deux tôles sont soumises, comme dans le cas de la fig. 7, à des forces qui tendent à les séparer, il est clair que chacune des deux lignes de rivets doit être disposée conformément aux régles indiquées pour la rivure simple. Il est presque superflu de faire remarquer que ce mode d'assemblage exigeant un nombre double de rivets, tout en ne présentant que la même résistance, ne doit être employé que dans les cas où l'on tient à avoir d'un côté une surface unie.

Lorsque les deux tôles, au contraire, sous l'action des forces auxquelles elles sont soumises, tendent à se rapprocher, comme dans le cas de la fig. 8, l'assemblage par recouvrement devient très rationnel, puisque les rivets se trouvent alors, pour ainsi dire, soustraits à l'action des forces qui agissent sur les tôles; il devient possible, par suite, de se contenter d'un petit nombre de rivets, pour l'écartement desquels on peut adopter, sans inconvénient, une longueur double de celle qu'on admettrait pour une rivure simple. Ainsi donc, dans le cas d'un assemblage avec bande de recouvrement, lorsque les tôles tendent à se rapprocher, on peut admettre les règles suivantes:

Diamètre d'un rivet . . . . $1{\cdot}5\ \delta$

Distance de deux rivets consécutifs sur une même file . $10\ \delta$

Ce mode d'assemblage est particulièrement employé pour le blindage des navires, et dans ce cas, il est parfaitement convenable, puisque les tôles se trouvent pressées les unes contre les autres.

Rivures à chaines. Fig. 9, pl. X. Dans ce mode d'assemblage les deux tôles à réunir sont simplement juxtaposées bord à bord et leur joint recouvert par deux bandes qu'on relie par des rivets. Chaque rivet, dans cette disposition, résiste, par deux de ses sections, à l'effort de cisaillement et on peut, par suite, adopter pour cette rivure les mêmes règles que pour la rivure double. On voit par là que la rivure à chaines, à égale résistance, exige le même nombre de rivets que la rivure double et, comme ces rivets sont plus longs, elle est plus dispendieuse à établir; aussi n'en fait-on usage que dans des cas très-particuliers.

Rivures légères. On comprend sous cette dénomination tous les assemblages qui sont destinés, non à prévenir un déplacement relatif des tôles, mais simplement à les maintenir reliées; en d'autres termes, ce sont les assemblages dans lesquels les rivets sont peu ou point soumis au cisaillement. Dans ces rivures légères, dont l'emploi est très fréquent, les rivets peuvent avoir d'assez faibles dimensions et d'assez grands écartements. L'examen d'un grand nombre de rivures de ce genre a conduit aux régles suivantes:

Diamètre d'un corps de rivet . . . $d = 1{\cdot}5\ \delta$

Espacement de deux rivets consécutifs $e = 10\ \delta$

Fers cornières. On désigne sous ce nom des fers laminés, de 3 à 4 mètres de longueur, dont la section a l'une des formes représentées par les fig. 10 et 11 (pl. X.). On les emploie dans un très grand nombre d'appareils en tôle, pour fortifier les parois, assembler les différentes faces, etc.

Les dimensions à donner à la section d'un fer cornière se déterminent, en général, d'après l'épaisseur des tôles sur lesquelles il doit être rivé; nous devons, toutefois, faire remarquer que les cornières de forces différentes ne présentent pas des formes géométriquement semblables; ainsi, par exemple, la longueur h est toujours relativement plus grande pour les cornières minces que pour les fortes cornières.

En comparant les types courants du commerce, on arrive à formuler, pour les dimensions de la section, les règles empiriques suivantes:

1°, l'épaisseur moyenne Δ de la cornière (fig. 10) est égale à l'épaisseur de la tôle sur laquelle elle doit être rivée;

2°, l'épaisseur minima, à l'extrémité des branches, est égale à $\frac{6}{7}\Delta$;

3°, l'épaisseur maxima, mesurée sur un des côtés de l'angle, est égale à $\frac{8}{7}\Delta$;

4°, en désignant par h la longueur des branches, on a $h = 2{,}4 + 4{,}5\,\Delta$, en centimètres.

Pour Δ =	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
h =	4·20	4·65	5·10	5·55	6·00	6·45	6·90

Exemples d'assemblages à rivure.

1°. Assemblages de surfaces:

Fig. 1 (pl. XI). Rivure simple de deux tôles.

Fig. 2. " Rivure double.

Fig. 3, " Rivure de deux tôles avec bande de recouvrement.

Fig. 12, " Rivure à chaines.

Fig. 4, " Assemblage de trois feuilles de tôle. La feuille du milieu doit pénétrer entre les deux autres par une partie effilée, tandis que la tôle supérieure doit être légèrement pliée pour la recevoir; un seul rivet traverse les trois feuilles; les autres n'en réunissent que deux.

Fig. 5. Assemblage de quatre feuilles de tôle. Deux des tôles sont dans le même plan et se trouvent comprises entre les deux autres; deux rivets seulement traversent trois feuilles.

2°. Renforcement des tôles:

Renforcement au moyen de cornières,

Liaison de deux tôles au moyen de boulons vissés et rivés,

Liaison de deux tôles au moyen de boulons et de tubes.

3°. Formation d'arêtes:

Fig. 6. Formation d'une arête, au moyen d'une feuille plate et d'une feuille à bord recourbé.

Fig. 8. Autre disposition.

4°. Formation de coins:

Fig. 9 et 10. Formation de coins au moyen de cornières et de tôles plates.

Tourillons.

Dans les tourillons, les points principaux qu'il convient d'examiner sont les suivants: 1°, la forme; 2°, les dimensions à adopter pour que la pièce présente une résistance suffisante; 3°, les frottements; 4°, l'usure et l'échauffement.

Forme. La forme des tourillons est presque toujours cylindrique, très exceptionnellement sphérique. Pour qu'un arbre, muni de deux tourillons cylindriques, puisse servir d'axe de rotation à un corps, il faut évidemment que ces deux tourillons aient leurs axes géométriques sur une seule et même ligne droite, condition qu'il est facile de réaliser, en plaçant l'arbre entre les pointes d'un tour et en tournant les tourillons dans cette position.

Résistance. Un tourillon est toujours soumis à des efforts de flexion et ne travaille jamais par torsion; c'est en cela qu'il se distingue du corps de l'arbre, auquel on donne également une forme cylindrique et qui doit toujours résister à des efforts de torsion. On voit d'après cela qu'il est toujours possible de déterminer exactement la résistance d'un tourillon, lorsqu'il n'est soumis qu'à une pression constante. Admettons cette hypothèse et dans la fig. 12 (pl. X) désignons par:

P, la réaction du coussinet sur le tourillon, en la supposant uniformément répartie sur toute la longueur.

d, le diamètre et l, la longueur du tourillon, en centimètres,

σ, la tension maxima qui se produit en a;

le moment fléchissant qui tend à produire la rupture du tourillon à l'extrémité a est $\frac{P\,l}{2}$; d'un autre côté, la somme des moments de tous les efforts moléculaires, qui se produisent dans cette même section a, est représentée par $\frac{\sigma\,\pi\,d^3}{32}$, on a, par conséquent:

$$\frac{P\,l}{2} = \sigma\,\frac{\pi}{32}\,d^3$$

d'où

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\sigma\,\pi}}\;\sqrt[3]{P\,l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Ou encore

$$d = \sqrt[2]{\frac{16}{\sigma \pi} \left(\frac{l}{d}\right)} \sqrt[2]{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

La première de ces deux équations détermine le diamètre du tourillon, quand on connait sa longueur et la pression P qu'il doit supporter.

La seconde équation donne le même diamètre en fonction de la pression P et du rapport entre la longueur l et le diamètre d.

D'après l'équation (1) on pourrait croire que le diamètre du tourillon peut être pris aussi faible que l'on veut, à la condition de donner à l une longueur également très petite; mais ce serait une erreur; le tourillon doit non seulement résister à la rupture par flexion, (condition qui se trouve exprimée par les équations (1) et (2), mais encore résister au cisaillement qui tend à se produire dans la section a, sous l'action de la force P, et il nous reste à introduire cette nouvelle condition.

En désignant par σ_1 l'intensité de la force de cisaillement dans la section a, nous devons poser:

$$\sigma_1 \frac{d^2 \pi}{4} = P$$

d'où

$$d = \sqrt{\frac{4 P}{\pi \sigma_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Ainsi donc pour qu'un tourillon offre une résistance suffisante à la rupture par flexion et à la rupture par cisaillement, il doit avoir, comme diamètre, la plus grande des deux valeurs que donnent pour d les équations (2) et (3); si les valeurs fournies par ces deux équations sont égales, le tourillon offrira le même degré de sécurité relativement aux deux modes de rupture: c'est ce qui arrive lorsqu'on a:

$$d = \sqrt[2]{\frac{16}{\sigma \pi} \cdot \frac{l}{d}} \sqrt[2]{P} = \sqrt[2]{\frac{4 P}{\pi \sigma_1}}$$

Ou

$$\frac{l}{d} = \frac{\sigma}{4 \sigma_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Pour le fer forgé, les coefficients de rupture par cisaillement et par flexion sont sensiblement égaux; on peut donc poser approximativement $\sigma = \sigma_1$ et alors, en vertu de l'équation (4):

$$\frac{l}{d} = \frac{1}{4}$$

C'est-à-dire que la longueur d'un tourillon devrait être égale au quart de son diamètre pour qu'il présentât la même résistance à la rupture par flexion ou par cisaillement. Mais, en réalité, dans toutes les applications, on est conduit à donner aux tourillons une longueur bien supérieure à cette limite, et dès-lors on se trouve avoir des pièces exposées surtout à la rupture par flexion, et dont les dimensions doivent être déterminés par les formules (1) et (2).

Ces formules laissent le rapport $\frac{l}{d}$ indéterminé, et on peut profiter de cette indétermination pour satisfaire aux autres conditions que doit remplir un tourillon.

Au point de vue du frottement, il y a avantage à donner au tourillon un très petit diamètre, tandis qu'au point de vue de l'usure et de l'échauffement, il est préférable d'avoir un grand diamètre et une grande longueur. Comme ces conditions sont contradictoires, il convient d'adopter des régles différentes, pour déterminer les dimensions, suivant qu'il s'agit de tourillons tournant lentement, pour lesquels on n'a pas à redouter l'échauffement, ou, au contraire, de tourillons animés de grandes vitesses, qui sont exposés à de fréquents grippements et à une usure rapide.

Régles pratiques pour la détermination des dimensions des tourillons en fonte. En comparant les dimensions d'un grand nombre de tourillons en fonte, j'ai constaté que le rapport $\frac{l}{d}$, entre la longueur et le diamètre de ces pièces, n'offrait que de très faibles variations et j'en ai déduit, pour les tourillons de cette nature, la formule empirique:

$$\frac{l}{d} = 1{\cdot}21 + \frac{0{\cdot}87}{d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Un examen attentif des tourillons en fonte de roues hydrauliques m'a d'ailleurs montré qu'on avait:

$$\sqrt[2]{\frac{16}{\sigma \pi} \frac{l}{d}} = 0{\cdot}18 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

On peut donc poser:

$$d = 0{\cdot}18 \sqrt{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

En éliminant $\frac{l}{d}$, on trouve, au moyen des équations (5) et (6):

$$\sigma = 190 + \frac{136}{d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

L'équation (7) détermine le diamètre, l'équation (5) la longueur, et la relation (8) permet de calculer la tension σ par unité de surface :

Pour $d = 10 \quad 20 \quad 30$

on a $\sigma = 204 \quad 197 \quad 195$

Comme le coefficient de résistance à la rupture est, pour la fonte, de 3000, on voit, que les tourillons, calculés par les formules précédentes, ne travaillent, en réalité, qu'au quinzième $\left(\frac{200}{3000}\right)$ de leur résistance.

Le tableau suivant contient les résultats des formules pour un certain nombre de tourillons :

P en kilogr.	d en centimètres.	l en centimètres.	P en kilogr.	d en centimètres.	l en centimètres.
278	3.00	4.50	3735	11	14.18
326	3.25	4.80	4444	12	15.39
378	3.50	5.10	5216	13	16.60
434	3.75	5.41	6049	14	17.81
494	4.00	5.71	6944	15	19.02
625	4.50	6.31	7900	16	20.23
772	5.00	6.92	8920	17	21.44
934	5.50	7.53	10000	18	22.65
1111	6.00	8.13	11142	19	23.86
1304	6.50	8.74	12346	20	25.07
1512	7.00	9.34	14938	22	27.49
1736	7.50	9.94	17778	24	29.91
1975	8.00	10.55	20864	26	32.32
2230	8.50	11.15	24197	28	34.75
2500	9.00	11.76	27778	30	37.17
2785	9.50	12.37	31605	32	39.59
3086	10.00	12.97	35679	34	42.01

Dans les ateliers de construction, où on doit chercher à ne pas trop multiplier les modèles, il convient de modifier la table précédente, en admettant la même valeur de l pour deux valeurs consécutives de d; ainsi, par exemple, on peut prendre $l = 16{,}60$ pour $d = 12$ et $d = 13$; le nombre de modèles de paliers d'une série complète se trouve ainsi réduit de moitié sans aucun inconvénient.



Tourillons en fer forgé. Règles pratiques. En opérant comme précédemment, j'ai trouvé que, pour les tourillons en fer forgé, on pouvait poser:

$$\frac{1}{d} = 1{\cdot}21 + \frac{0{\cdot}87}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\sqrt[2]{\frac{16}{\sigma\pi}\,\frac{1}{d}} = 0{\cdot}12 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$d = 0{\cdot}12\sqrt{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Des équations (9) et (10) on tire, par l'élimination de $\frac{1}{d}$:

$$\sigma = 428 + \frac{308}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Pour $d = 10$, cette relation donne $\sigma = 459$ et, comme le coefficient de rupture, pour le fer forgé en barres de petites dimensions, est de 7000, on voit qu'avec les dimensions fournies par les formules précédentes, les tourillons ne travaillent, en réalité, qu'au quinzième de la charge de rupture.

Les résultats numériques des formules, pour un certain nombre de tourillons en fer, sont contenus dans le tableau suivant où, conformément à l'observation faite pour les tourillons en fonte, on a porté la même valeur de l pour deux valeurs consécutives de d.

P en kilogr.	d en centimètres.	l en centimètres.	P en kilogr.	d en centimètres.	l en centimètres.
156	1 50	2.70	3906	7.5	9·94
213	1.75	3.00	4444	8.0	11.15
278	2.00	3.30	5017	8.5	11.15
352	2.25	3.60	5625	9.0	12.37
434	2.50	3.90	6267	9.5	12.37
525	2.75	4.20	6944	10.0	14.18
625	3 00	4.80	8403	11.0	14.18
734	3.25	4.80	10000	12·0	16.60
851	3.50	5.40	11736	13·0	16.60
977	3.75	5.40	13611	14.0	19.02
1111	4.00	6.30	15625	15.0	19.02
1406	4.50	6.30	17778	16.0	21.44
1736	5.00	7.53	20069	17.0	21.44
2101	5.50	7.53	22500	18.0	23.86
2500	6.00	8.75	25069	19.0	23.86
2934	6.50	8.75	27778	20.0	25.07
3403	7 00	9.34			

Tourillons en acier. Dans quelques cas, et à titre exceptionnel, comme dans les locomotives, certains tourillons sont en acier fondu. J'ai constaté que, pour les tourillons de cette nature, on pouvait prendre:

$$\frac{l}{d} = \frac{5}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\sqrt[2]{\frac{16}{\sigma\,\pi}\,\frac{l}{d}} = 0{\cdot}09 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$d = 0{\cdot}09\sqrt{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Des équations (13) et (14) on tire $\sigma = 800$ et, comme le coefficient de rupture de l'acicr est, en moyenne, de 16000, on voit que ces pièces ne travaillent qu'au vingtième de la charge de rupture.

Régles pour les tourillons animés de grandes vitesses. Pour qu'un tourillon, tournant très vite, n'éprouve pas d'usure sensible et ne soit pas trop exposé à s'échauffer, il importe que la pression exercée entre le tourillon et son coussinet ne dépasse pas une certaine limite, qui est d'ailleurs d'autant plus faible que la vitesse du tourillon à sa circonférence est plus considérable. Comme cette pression peut être supposée proportionnelle à la quantité $\frac{P}{d\,l}$, il semble rationnel de poser:

$$\frac{P}{d\,l} = \frac{1}{a + b\,n\,d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

a et b étant des constantes à déterminer par expérience et n le nombre de tours de l'arbre par minute. Cette équation, combinée avec la relation (2) établie précédemment, détermine les dimensions qu'il convient de donner à un tourillon pour qu'il se trouve daus des conditions satisfaisantes, au point de vue de la résistance, de l'usure et de l'échauffement. On tire de ces équations:

$$d^2 = P\sqrt{\frac{16}{\sigma\,\pi}\,(a + b\,n\,d)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$l = \frac{P}{d}\,(a + b\,n\,d)$$

Pour un tourillon qui ne tourne pas et qui supporte simplement une charge, $n = o$ et on doit poser $l = d$. Dans cette hypothèse, les équations (17) et (18) donnent:

$$a = \frac{16}{\sigma \pi}$$

et en prenant $\sigma = 300$:

$$a = \frac{16}{300 \times 3{\cdot}14} = 0{\cdot}017 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

D'un autre côté, l'expérience indique que, pour un tourillon faisant 360 tours par minute et supportant une charge de 2000 kilogrammes, la longueur doit être double du diamètre.

L'équation (2), en y introduisant ces conditions, donne:

$$d = \sqrt{\frac{16 \times 2}{300 \times 3{\cdot}14} \times 2000} = 8{\cdot}4$$

et on tire alors de l'équation (18):

$$b = \frac{1}{n}\left(\frac{l}{P} - \frac{a}{d}\right) = \frac{1}{360}\left(\frac{16{\cdot}8}{2000} - \frac{0{\cdot}017}{8{\cdot}4}\right) = 0{\cdot}0000177 \; . \quad (20)$$

Les valeurs de a et b étant ainsi déterminées expérimentalement, les équations (17) et (18) nous permettent de calculer les dimensions d'un tourillon quelconque.

Soit, par exemple, $P = 1000$, $n = 600$, $\sigma = 300$; la formule (17) donne:

$$d^2 = 1000 \sqrt{\frac{16}{300 \times 3{\cdot}14} (0{\cdot}017 + 0{\cdot}0000177 \times 600 \times d)}$$

expression qui, calculée par approximation, conduit à $d = 6$; on tire alors de l'équation (18):

$$l = \frac{1000}{6} (0{\cdot}017 + 0{\cdot}0000177 \times 600 \times 6) = 13.$$

Arbres verticaux. Pivots. Les arbres verticaux sont munis à leur partie inférieure d'un tourillon, ou pivot, reposant généralement dans une crapaudine en bronze (fig. 13, pl. X). La pression du pivot sur le fond de cette crapaudine est égale au poids de l'arbre vertical, augmenté de celui des roues et des autres organes dont il est muni. Pour que, dans cette disposition, il ne se produise pas d'échauffement ou de grippement, il importe que la pression, qui s'exerce entre la surface inférieure du pivot et celle de la crapaudine, ne dépasse pas une certaine limite, laquelle varie d'ailleurs avec la vitesse de rotation de

l'arbre. En suivant les principes qui nous ont servi à calculer les tourillons animés de grandes vitesses, nous obtiendrons, pour le cas actuel, l'équation fondamentale:

$$\frac{P}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{1}{a + b\,n\,d} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

P représentant la pression totale du pivot sur le fond de la crapaudine, n le nombre de tours par minute, d le diamètre du pivot, a et b des constantes, qui ont pour valeurs:

$$a = 0{\cdot}017$$

$$b = 0{\cdot}0000177$$

En examinant avec soin de grands arbres verticaux de transmission, établis dans des conditions satisfaisantes, j'ai trouvé que, pour un diamètre de pivot de 16 centimètres et une vitesse moyenne de 120 tours par minute, la pression par centimètre carré $\left(\frac{P}{d^2 \frac{\pi}{4}}\right)$ était de 20 kilogrammes environ; ces résultats sont tout-à-fait conformes à ceux de l'équation (1); car pour

$$n = 120, \quad = d \quad 16, \quad a = 0{\cdot}017, \quad b = 0{\cdot}0000277$$

elle donne:

$$\frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{1}{0{\cdot}017 + 0{\cdot}0000177 \times 120 \times 16} = 20 \text{ Kilogrammes}$$

Nous admettrons, par suite, que cette équation (1) peut être prise comme l'expression réelle des conditions du problème.

Si on pose, pour abréger:

$$\alpha = \frac{2\,b}{\pi} = 0{\cdot}0000112$$

$$\beta = \frac{a\,\pi}{b^2} = 170490000$$

L'équation (1) devient:

$$d = \alpha\,P\,n\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\beta}{P\,n^2}}\right) \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Lorsque les arbres ne sont animés que d'une faible vitesse, c'est-à-dire lorsque n est très petit, cette dernière relation peut être remplacée par l'équation approchée:

$$d = \alpha \sqrt{\beta} \sqrt{P}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

et, en remplaçant α et β par leurs valeurs:

$$d = 0{\cdot}14 \sqrt{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

pour des arbres tournant très vite et fortement chargés, l'équation (2) conduit à la formule:

$$d = 2 \alpha P n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ou

$$d = 0{\cdot}0000224 \, P \, n$$

Arbres de transmission.

L'effet utile des moteurs d'une usine est ordinairement transmis aux machines outils par des arbres de transmission, qui doivent présenter une résistance suffisante pour ne pas éprouver de déformations sensibles sous l'action des forces développées.

Les régles à suivre, pour calculer les dimensions de ces arbres, dépendent des différentes conditions qu'on se propose de leur faire remplir. Ainsi, par exemple, on peut demander que tous les arbres, formés d'une même matière, travaillent également sous l'action des forces extérieures, ou que l'angle de torsion soit indépendant du diamètre, mais proportionnel à la longueur des arbres, ou enfin, que l'angle de torsion d'un arbre de longueur donnée ait une valeur déterminée. Nous allons voir comment on peut trouver les diamètres satisfaisant à chacune de ces trois conditions.

Arbres d'égale résistance. Désignons par:

R, la longueur, en centimètres, du bras de levier sur lequel agit la force extérieure, qui tend à produire la torsion;

P, la valeur de cette force, en kilogrammes,

d, le diamètre de l'arbre, en centimètres,

T, l'intensité de la tension par unité de surface, sur le contour de l'arbre.



Si nous nous imposons la condition que tous les arbres formés de la même matière travaillent également, la valeur de T doit être la même pour tous ces arbres; or, en étudiant la résistance à la torsion, nous avons trouvé (page 56), la relation:

$$P\,R = \frac{T\,\pi}{16}\,d^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

d'où on tire:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{T\,\pi}}\;\sqrt[3]{P\,R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Cette équation détermine les arbres d'égale résistance, à la condition de prendre, pour une matière déterminée, une valeur constante de $\sqrt[3]{\frac{16}{T\pi}}$; elle montre d'ailleurs que le diamètre de l'arbre doit être proportionnel à la racine cubique du moment de torsion.

Pour que les arbres, soumis à cet effort, présentent une sécurité compléte et n'éprouvent que des déformations insensibles, il faut que le maximum de la tension développée ne soit qu'une fraction des coefficients de rupture par torsion, que nous avons indiqués pour les différents matériaux (page 95). Nous verrons d'ailleurs plus loin la valeur qu'il convient de donner à T, pour chaque matière, afin de retomber sur les dimensions généralement admises dans la pratique.

La formule (2) se prête parfaitement au calcul des diamètres des arbres, lorsqu'on donne directement la force P et son bras de levier R, ou lorsqu'on peut déterminer facilement ces deux quantités. C'est ce qui se présente, par exemple, lorsqu'on donne le rayon d'une roue et la force tangentielle appliquée à sa circonférence. P R est, en effet, dans ce cas, le moment de torsion appliqué à l'arbre sur lequel est calée la roue. Mais lorsqu'on a à déterminer le diamètre d'un arbre, on ne connait le plus souvent que la force en chevaux N qu'il doit transmettre et le nombre n de tours qu'il doit faire par minute; on a, par suite, intérêt à avoir une formule donnant directement le diamètre en fonction de N et n. Pour l'établir, supposons que l'arbre cherché porte une poulie de rayon R, à la circonférence de laquelle soit appliquée tangentiellement une force P; en désignant par v la vitesse en mètres d'un point de cette circonférence, nous aurons:

$$\left.\begin{aligned} 75\ N &= P\ v \\ v &= \frac{2\ \pi\ R\ n}{100 \times 60} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

l'élimination de v conduit à la relation:

$$P\ R = \frac{100 \times 60 \times 75}{2\ \pi}\ \frac{N}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

qui donne précisément le moment de torsion en fonction de N et n; en portant cette valeur dans l'équation (2), on trouve:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\ \pi^2\ T}}\ \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Pour que cette formule puisse donner des dimensions en rapport avec celles qu'on admet dans la pratique, il suffit de poser:

pour le fer forgé,

$$\sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\ \pi^2\ T}} = 12$$

et pour la fonte,

$$\sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\ \pi^2\ T}} = 16$$

ce qui correspond à:

$T = 210$ pour le fer forgé.

$T = 90$ pour la fonte.

Pour ces deux métaux, ainsi que nous l'avons vu page 95, les coefficients de torsion sont respectivement 7000 et 3000. On en conclut que, dans les arbres de transmission, on ne fait travailler la matière qu'à $\frac{1}{33}\left(\frac{7000}{210} \text{ ou } \frac{3000}{90}\right)$ de la charge de rupture par torsion; en d'autres termes, la rupture de ces arbres ne se produirait que pour un moment de torsion trente trois fois plus grand que celui auquel ils sont soumis en réalité.

Pour les valeurs précédentes de T, on trouve:

fer forgé $\sqrt[3]{\frac{16}{T\ \pi}} = 0{\cdot}29$

$$\text{fonte} \quad \sqrt[3]{\frac{16}{T\pi}} = 0{\cdot}39$$

ces valeurs introduites dans les formules (2) et (5), donnent:

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{\cdot}29\sqrt[3]{PR} = 12\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \text{fer forgé} \\ d &= 0{\cdot}39\sqrt[3]{PR} = 16\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \text{fonte} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Il est d'ailleurs facile de calculer la valeur de l'angle de torsion des arbres déterminés à l'aide de ces formules.

Dans la théorie de la torsion (page 59) nous avons trouvé, pour l'angle de torsion Θ, exprimé en degrés:

$$\Theta = 16\,\frac{PR}{G}\,\frac{l}{d^4}\,\frac{360}{\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

l désignant la longueur de l'arbre et G le coefficient d'élasticité de glissement. Mais, d'après la formule (2), on a $PR = \frac{\pi d^3 T}{16}$; cette valeur, portée dans l'équation (7), donne:

$$\Theta = \frac{16 \times 360 \times T}{16\,\pi^3\,G}\,\frac{l}{d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Comme d'ailleurs on a:

pour le fer forgé . . $T = 210 \quad G = 1000000$

pour la fonte. . . . . $T = 90 \quad G = 400000$

on en conclut:

$$\left.\begin{aligned} &\text{pour le fer forgé . .} \ \Theta = \frac{1}{41}\,\frac{l}{d} \\ &\text{pour la fonte . . . .} \ \Theta = \frac{1}{39}\,\frac{l}{d} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Les arbres d'égale résistance, calculés par les formules (6), jouissent, comme l'indiquent les équations (9), de la propriété d'avoir un angle de torsion d'autant plus grand que le diamètre est plus petit; on voit par là que les arbres de faible diamètre se déforment plus que les autres. Si la longueur devient égale à 40 fois le diamètre, l'angle de torsion a pour valeur 1°.

Arbres d'égale élasticité. Proposons-nous maintenant de déterminer le diamètre d'un arbre, de telle manière que l'angle de torsion soit indépendant de ce diamètre et proportionnel à la longueur.

La formule (7) montre, que l'angle de torsion a une expression de la forme $\Theta = \alpha\, l$, si l'on pose:

$$\alpha = 16\, \frac{P\, R}{G\, d^4}\, \frac{360}{\pi^2} = \text{Const.} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

On en tire:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360}{G\, \alpha\, \pi^2}}\, \sqrt[4]{P\, R} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Ou, en remplaçant P R par son expression en fonction de N et n:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360 \times 100 \times 60 \times 75}{G\, \alpha\, \pi^2\, 2\, \pi}}\, \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \ldots \quad (12)$$

Pour que les formules (11) et (12) déterminent des dimensions qui soient en rapport avec celles de la pratique, il faut poser:

$$\text{pour le fer forgé} \quad \sqrt[4]{\frac{16 \times 360 \times 100 \times 60 \times 75}{G\, \alpha\, \pi^2\, 2\, \pi}} = 12$$

ou, comme $G = 1{\cdot}000000$:

$$\alpha = \frac{1}{547} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

On a alors:

$$\sqrt[4]{\frac{16 \times 360}{G\, \alpha\, \pi^2}} = 0{\cdot}75$$

et enfin

$$d = 0{\cdot}75\, \sqrt[4]{P\, R} = 12\, \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Cette expression de d ne diffère de celle que nous avons précédemment trouvée, pour les arbres d'égale résistance, que par le degré du radical; pour $\frac{N}{n} = 1$, les deux formules don-

nent le même résultat; mais lorsque $\frac{N}{n}$ est différent de 1, les valeurs fournies par ces deux formules ne sont plus les mêmes.

Arbres correspondant à un angle de torsion donné. Imposons-nous maintenant la condition que l'angle de torsion total d'un arbre de longueur donnée ait un certaine valeur déterminée. Dans ce cas, la relation (7) donne pour la valeur du diamètre:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360}{G \pi^2}} \sqrt[4]{\frac{P R l}{\Theta}}$$

ou, en exprimant P R en fonction de $\frac{N}{n}$:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360 \times 100 \times 60 \times 75}{G \pi^2 2 \pi}} \sqrt[4]{\frac{N}{n} \frac{l}{\Theta}}$$

Si. dans cette expression, on fait G = 1·000·000, on trouve:

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{\cdot}156 \sqrt[4]{\frac{P R l}{\Theta}} \\ d &= 2{\cdot}5 \sqrt[4]{\frac{N}{n} \frac{l}{\Theta}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Les tableaux suivants donnent les diamètres des arbres en fer et en fonte, calculés par la formule (14).

Arbres en fer forgé $d = 12 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$

$\frac{N}{n}$	d	$\frac{N}{n}$	d	$\frac{N}{n}$	d	$\frac{N}{n}$	d
0·0156	3·00	0·1589	6·5	1·0000	12	4·630	20
0·0199	3·25	0·1985	7·0	1·2698	13	6·162	22
0·0248	3·50	0.2441	7·5	1·5860	14	8·000	24
0·0305	3·75	0.2963	8·0	1·9507	15	10·171	26
0·0371	4·00	0.3554	8·5	2·3630	16	12·704	28
0·0527	4·50	0.4219	9·0	2·8397	17	15·625	30
0·0723	5·00	0.4962	9·5	3·3710	18	18·963	32
0·0963	5·50	0·5787	10·0	3·9640	19	22·745	34
0·1250	6·00	0·7703	11·0				

Arbres en fonte $d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$

$\frac{N}{n}$	d	$\frac{N}{n}$	d	$\frac{N}{n}$	d	$\frac{N}{n}$	d
0·00659	3·00	0·0670	6·5	0·4218	12	1·953	20
0·00838	3.25	0·0837	7·0	0·5363	13	2·600	22
0·01047	3·50	0.1030	7·5	0·6700	14	3·375	24
0·01288	3·75	0·1250	8·0	0·8240	15	4·291	26
0·01563	4·00	0 1500	8·5	1·0000	16	5·360	28
0.02225	4·50	0·1780	9·0	1·1995	17	6·592	30
0·03052	5·00	0.2093	9·5	1·4238	18	8·000	32
0·04062	5·50	0.2442	10·0	1·6745	19	9·596	34
0·05274	6·00	0·3249	11·0				

Arbres d'égale élasticité en fer forgé $d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$

$\frac{N}{n}$	d	$\frac{N}{n}$	d	$\frac{N}{n}$	d	$\frac{N}{n}$	d
0·0039	3·00	0·0625	6·0	0·4823	10	5·062	18
0 0054	3·25	0·0861	6·5	0·7061	11	6·285	19
0 0072	3·50	0·1158	7·0	1·0000	12	7·716	20
0·0095	3·75	0·1526	7·5	1·3774	13	11·297	22
0·0123	4·00	0·1975	8·0	1·8526	14	16 000	24
0·0199	4·50	0·2517	8·5	2·4414	15	22·037	26
0 0301	5·00	0·3164	9·0	3·1605	16	29·643	28
0·0441	5·50	0·3928	9·5	4·0279	17	39·063	30

Construction des axes.

Axes de rotation soumis à des efforts de flexion.

Pour construire rationnellement des axes de ce genre, on doit déterminer leurs dimensions et leur forme, de manière à réduire le plus possible les frais de matière et de main-d'œuvre. Cette condition se trouve réalisée, lorsqu'on choisit des formes simples, d'une exécution facile, qui s'écartent peu de celles des corps d'égale résistance; il suffit, pour cela, de déterminer quelques unes des sections principales, de façon à ce que le maxi-

mum de tension soit le même pour chacune d'elles et de les réunir par des lignes de raccordement simples. Nous allons appliquer ce procédé à quelques exemples.

Construction d'un axe de balancier. Supposons qu'on ait à construire un axe de balancier (fig. 1, pl. XII).

Désignons par:

2λ la longueur totale de l'axe,

$2P$ la pression exercée par le balancier sur cet axe, en son milieu.

d le diamètre, l la longueur } de l'un des tourillons,

D le diamètre de l'axe au milieu de la portée.

Si on néglige le poids de l'axe lui-même par rapport à la charge $2P$, chaque tourillon supportera un effort égal à P et les valeurs de d et l, pour le fer forgé, se trouveront déterminées par les formules:

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{\cdot}12\sqrt{P} \\ l &= 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\,d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Maintenant $\frac{Pl}{2}$ est le moment de la force qui tend à produire la rupture du tourillon à sa naissance, $P\lambda$ le moment fléchissant au milieu de l'axe; par conséquent, pour que la résistance de l'axe soit la même, au milieu et à la naissance du tourillon, il faut qu'on ait:

$$\frac{Pl}{2} : P\lambda = d^3 : D^3$$

d'où on tire:

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{2\lambda}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

C'est-à-dire qu'on obtient le diamètre D, au milieu, en multipliant le diamètre du tourillon par la racine cubique du rapport de la longueur totale de l'axe à celle du tourillon; D étant déterminé, on prend $a\,a = a_1\,a_1 = \frac{5}{4}\,d$, $c\,c = \frac{5}{4}\,b\,b = \frac{5}{4}\,D$, on mène les lignes droites $b\,a$, $b_1\,a_1$ et on trace le rectangle $c\,c\,c_1\,c_1$, dont la longueur $c\,c_1$ est déterminée par celle du moyeu du balancier; les lignes courbes pointillées représentent deux paraboles cubiques, qu'il conviendrait théoriquement d'adopter pour le profil de l'arbre, afin qu'il présentât la même résistance dans toutes les sections.

On voit que la forme simple, que nous avons substituée à celle-là, n'exige qu'un assez faible supplément de matière, qui est d'ailleurs largement compensée par la facilité qu'on trouve dans le tournage de surfaces cylindriques et coniques; nous devons de plus ajouter que, même au point de vue de l'aspect, les lignes droites sont, dans ce cas, beaucoup plus satisfaisantes que les courbes.

Construction d'un axe de balancier, lorsque la portée n'est plus au milieu. (Fig. 2, pl. XII.)

Désignons encore par:

2 P la pression du balancier sur l'axe,

λ_1 λ_1 les distances du milieu du balancier aux milieux des tourillons,

d d_1 l l_1 les diamètres et les longueurs de ces tourillons.

En négligeant le poids propre de l'axe, les pressions, supportées par les tourillons, sont représentées par:

$$2\,P\,\frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1} \text{ et } 2\,P\,\frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}$$

On a par suite:

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{\cdot}12\sqrt{2\,P\,\frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}} \quad l = 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\,d \\ d_1 &= 0{\cdot}12\sqrt{2\,P\,\frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}} \quad l = 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\,d_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

le diamètre en b b est déterminé par la relation:

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{2\,\lambda}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

et, pour le tracé de l'arbre, on a enfin:

$$a\,a = \frac{5}{4}\,d \quad a_1\,a_1 = \frac{5}{4}\,d_1 \quad c\,c = \frac{5}{4}\,D \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

la longueur de la portée cylindrique c c_1 est d'ailleurs déterminée, comme dans l'autre cas, par la longueur du moyeu du balancier.

Construction d'un arbre de roue hydraulique. Soit A D (fig. 3, pl. XII) un arbre reposant par deux tourillons sur des coussinets et chargé en B et C de deux forces égales P et P.

En négligeant le poids propre de l'arbre, qui est toujours très petit par rapport à la charge totale 2 P, chaque tourillon se trouvera soumis à un effort P. Si nous supposons qu'il s'agisse d'un arbre en fonte, les dimensions des tourillons seront données par les formules:

$$\left.\begin{array}{l} d = 0{\cdot}18 \sqrt{P} \\ l = 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\, d \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Les parties de l'arbre, de A à B et de D à C, doivent être renforcées en se rapprochant le plus possible du profil des paraboles cubiques d'égale résistance et le diamètre b b en B et C est déterminé par la relation:

$$b\,b = D = d \sqrt[3]{\frac{2\,c}{l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Le moment statique de la force qui tend à produire la rupture en B est P c; le moment analogue, pour une section quelconque m n entre B et C, est, en négligeant le poids de l'arbre:

$$P\,x - P\,(x - c) = P\,c$$

C'est-à-dire que le moment fléchissant est le même pour toutes les sections comprises entre B et C; si donc on admet pour ces sections la forme circulaire, on satisfera aux conditions de résistance, en adoptant pour la partie B C un cylindre de diamètre D.

Cette forme cylindrique, qui est d'une construction facile, est très convenable, tant que le diamètre D ne dépasse pas 15 ou 16 centimètres, mais, au-dessus de cette limite, la forme circulaire doit être remplacée par une autre, présentant un plus grand développement, car autrement on s'exposerait à avoir une pièce de fonte avec de nombreux défauts; on sait en effet, que dans la coulée des pièces cylindriques de fort diamètre, le métal se solidifie d'abord à la surface et, lorsque l'intérieur se contracte à son tour, en passant à l'état solide, la matière ne peut plus remplir le moule et il se forme alors des vides et des soufflures.

On est donc amené, dans ce cas, à adopter pour la section de l'arbre en son milieu une forme en croix, comme celle des fig. 4 et 5 (pl. XII).

Pour arriver à satisfaire à la fois aux conditions de résistance et d'aspect, le mieux est de prendre h au sentiment et de

calculer b. Comme dans la section du milieu et celle faite en B, le moment fléchissant est le même, il en résulte que la valeur de E pour la section circulaire en B doit être égale à la valeur de E correspondant à la section en croix du milieu; on doit donc avoir:

$$\frac{\pi D^3}{32} = \frac{1}{6\,h}\left[h\,b^3 + b\,(h^3 - b^3)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

équation qui peut servir à déterminer une valeur approchée de b; comme $h\,b^3$ et b^4 sont très petits par rapport à $b\,h^3$, on peut les négliger et poser simplement:

$$\frac{\pi D^3}{32} = \frac{1}{6}\,b\,h^2$$

d'où on tire:

$$b = D\,\frac{6\,\pi}{32}\left(\frac{D}{h}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Une fois les dimensions de la section du milieu ainsi déterminées, il reste à tracer les raccordements de cette section aux sections B et C.

Les fig. 4 et 5 représentent deux des formes qu'on peut adopter pour ce raccordement. Dans la première, l'épaisseur de la nervure est constante, la hauteur variable, et la partie la plus rapprochée de l'axe est composée d'un noyau à section circulaire, dont le diamètre va en augmentant du milieu aux extrémités. Dans la seconde forme, ce noyau n'existe plus et la largeur de la nervure est variable; elle augmente d'une manière continue, à mesure qu'on s'éloigne du milieu.

Arbres soumis à la fois à des efforts de torsion et de flexion. Lorsqu'une portion d'arbre est soumise à des forces qui tendent à produire à la fois des effets de torsion et de flexion, le moyen le plus rationnel, pour déterminer les dimensions des sections, consiste dans l'établissement d'une formule où entre la résultante des tensions partielles; mais comme ce procédé conduit à des calculs d'une assez grande complication, nous nous dispenserons d'y recourir, en nous bornant à une solution approximative.

Si on admet que la torsion d'une pièce ne modifie pas sa résistance à la flexion et que réciproquement la flexion n'a pas d'influence sensible sur la résistance à la torsion, on peut cal-

culer quelles devraient être les dimensions des sections pour résister au moment de torsion et au moment de flexion, considérés séparément, et prendre la plus grande des dimensions ainsi déterminées. Ce procédé est évidemment très admissible, quand les deux moments ont des valeurs très différentes, mais il laisse quelques doutes, quand ces moments sont sensiblement égaux.

Pour opérer en toute sécurité, on pourrait calculer d'abord l'arbre pour résister au moment de torsion et le renforcer ensuite d'une certaine quantité qui, à elle seule, fût suffisante pour résister au moment de flexion; dans le cas où les moments sont très peu différents l'un de l'autre, cette dernière règle a l'inconvénient de donner des dimensions un peu fortes. Nous allons toutefois montrer comment on peut l'appliquer au calcul des arbres soumis à la fois aux deux genres d'efforts.

Soient:

N le travail, exprimé en chevaux, qui doit être transmis par l'arbre,

n le nombre de tours de cet arbre par minute,

d le diamètre d'un arbre de transmission cylindrique pour N chevaux et n tours,

M le moment fléchissant d'une section déterminée de l'arbre (exprimé en prenant pour unités le kilogramme et le centimètre),

h et b les dimensions des nervures (fig. 3, pl. XII) qui, prises isolément, suffiraient pour résister au moment de flexion,

σ la tension, par unité de surface, due à la flexion.

On a tout d'abord:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

D'ailleurs:

$$M = \frac{\sigma}{6\,h}\left[(h^3 - d^3)\,b + (h - d)\,b^3\right]$$

ou, comme le second terme, entre les crochets, est négligeable par rapport au premier:

$$M = \frac{\sigma}{6\,h}\,b\,(h^3 - d^3)$$

On en tire:

$$b = \frac{6\,M\,h}{\sigma\,(h^3 - d^3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Nous pouvons prendre ici pour σ une valeur assez élevée, 400, par exemple, attendu que notre procédé de calcul doit nous

conduire à des dimensions trop fortes; nous pouvons également, pour la même raison, dans l'équation (10) substituer le coefficient 12 au coefficient 16; enfin la hauteur h de la nervure peut être déterminée au sentiment. Nous allons du reste montrer, par quelques exemples, l'usage de ces formules.

Supposons qu'on ait à construire un arbre de roue hydraulique (fig. 6) avec deux rosettes et dans les conditions suivantes:

Effet utile de la roue	40 chevaux
Poids de la roue	20000 kilogr.
Longueur de l'arbre mesurée entre les milieux des tourillons	350 centimètres
Distance du milieu d'une rosette au milieu du tourillon	$c = 50$ "
Effort de torsion sur le milieu de l'arbre . .	20 chevaux
Nombre de tours de la roue par minute . .	6 "

A ces données correspondent les résultats suivants:

Pression exercée sur un tourillon	$= 10000$ kilogr.
Diamètre d'un tourillon $0{,}18\sqrt{10000}$	$= 18$ centimètres
Longueur d'un tourillon $0{,}87 + 1{,}21 \times 18$ . .	$= 22$ "
Diamètre de l'arbre au milieu d'une rosette $18\sqrt[3]{\frac{50}{\frac{1}{2}22}}$	$= 30$ "
Diamètre d'un arbre de transmission pour 20 chevaux et 6 tours par minute $12\sqrt[3]{\frac{20}{6}}$	$= 17$ "
Hauteur de la nervure au milieu	$h = 42$ "
Tension admise par unité de surface	$\sigma = 400$ kilogr.
Moment fléchissant $M = 10000 \times 50$	$= 500000$ kilogr.

Epaisseur de la nervure d'après la formule (11)

$$b = \frac{6 \times 500000 \times 42}{400 \times (42^3 - 17^3)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad = 5 \text{ centimètres}$$

Supposons maintenant qu'on ait à construire un arbre de roue hydraulique avec 3 rosettes (fig. 7), dans les conditions suivantes:

Effet utile de la roue	30 chevaux.
Poids de la roue	12000 kilogr.
Longueur de l'arbre mesurée entre les milieux des tourillons	450 centimètres.

Distance des milieux des rosettes extrêmes aux milieux des tourillons . . . . 50 centimètres.
Nombre de tours de la roue par minute . . 8 „
Effort de torsion exercé sur la partie B E de l'arbre . . . . 10 chevaux.

En partant de ces données, on arrive aux résultats suivants:

Pression sur un tourillon . . . . 6000 kilogr.
Diamètre d'un tourillon $0{\cdot}18\sqrt{6000}$ . . . . . $= 14$ centimètres.
Longueur d'un tourillon $0{\cdot}87 + 1{\cdot}21 \times 14$ . . $= 18$ „
Diamètre b b de l'arbre en B et C, $14\sqrt[3]{\frac{50}{9}}$ $= 25$ „
Diamètre du noyau circulaire de la partie E B

$$d = 12\sqrt[3]{\frac{10}{8}} \quad \ldots\ldots \quad = 13 \text{ „}$$

Diamètre du noyau circulaire de la partie E C

$$d_1 = 12\sqrt[3]{\frac{20}{8}} \quad \ldots\ldots \quad = 16 \text{ „}$$

Si, pour le calcul du moment fléchissant au milieu de l'arbre, on néglige le poids de cet arbre et, si on suppose le poids total de 12000 kilogrammes réparti sur les trois points B, E, C, on trouve:

$$M = 225 \times \frac{12000}{2} - (225 - 50)\frac{12000}{3} = 648000.$$

Hauteur de la nervure au milieu . . . . . . $h = 48$ centimètres.
Epaisseur de la nervure d'après la formule (11)

$$b = \frac{6 \times 648000 \times 48}{400\,(48^3 - 13^3)} \quad \ldots\ldots \quad = 4 \text{ „}$$

Accouplements d'arbres.

Description de différents modes d'accouplement. Les arbres d'une grande longueur sont toujours formés de plusieurs parties séparées, qu'on réunit ensemble par différents modes d'assemblages, dont la pl. XIII représente les principaux types.

La fig. 1 représente le système le plus simple d'accouplement d'arbres. Les arbres A et B, cylindriques sur toute leur

longueur, sont reliés par une pièce a, qui pénètre dans deux rainures à queue d'hironde, pratiquées à l'extrémité de chacun d'eux; le tout est recouvert d'un manchon en fonte, alésé rigoureusement au diamètre des arbres et la jonction est assurée en outre par une clavette, entaillée à la fois dans ces arbres et dans le manchon.

Dans l'assemblage de la fig. 2, les arbres sont terminés par deux demi-cylindres et portent l'un sur l'autre par des surfaces planes à angle droit; la position du manchon est assurée, comme dans le cas précédent, par une clavette.

Dans le dispositif de la fig. 3, les extrémités des arbres sont filetées et le manchon b forme écrou; les deux pas de vis ont la même direction qui est déterminée d'après le sens de la rotation de la transmission, de telle manière que les arbres tendent à s'engager dans l'écrou du manchon. Pour que cet assemblage puisse se faire on se défaire facilement, il est indispensable que le filetage de l'un des arbres soit plus long que celui de l'autre de la demi-longueur du manchon; dans ce cas, il suffit évidemment, pour opérer la séparation, d'amener le manchon dans la position figurée en pointillé.

Le mode de jonction. représenté par la fig. 4. ne diffère de celui de la fig. 2 qu'en ce que la partie recouverte par le manchon a un diamètre plus grand que celui du corps des arbres.

La fig. 5 représente un accouplement mobile, par manchon à dents.

La fig. 6 indique l'assemblage de deux arbres à l'aide du joint de Hook. A et A_1 sont les deux arbres; B et B_1, deux pièces en forme d'étriers, rendues solidaires de ces arbres; C un anneau à quatre tourillons. Les extrémités de la fourchette B s'engagent dans les deux tourillons b b et celles de B_1 dans les tourillons b_1 b_1; il est clair qu'avec ce mode d'assemblage, la position de l'axe d'un des arbres peut être modifiée par rapport à l'autre; mais dans tous les cas la rotation de l'un des arbres entraine celle de l'autre.

Le système de Hook, soigneusement exécuté, est évidemment celui qui satisfait le plus complétement aux différentes conditions que l'on doit se proposer de remplir dans l'accouplement de deux arbres. Le mouvement de rotation de l'un des arbres peut en effet, dans ce système, continuer à se transmettre à l'autre, lors même que la position relative des deux arbres viendrait à être modifiée, tandis qu'au contraire tous les autres modes

d'assemblages que nous avons décrits forment des liaisons rigides et supposent par suite que les arbres restent invariablement en ligne droite. Malheureusement le joint de Hook est trop compliqué et trop couteux à établir, pour qu'on puisse songer à l'employer d'une manière régulière, et on doit le réserver pour les arbres dont la position relative doit varier et auxquels le joint doit laisser toute facilité de mouvement.

Les modes de jonction, représentés par les fig. 1, 2 et 3, conviennent surtout pour les arbres en fer forgé dont le diamètre ne dépasse pas 12 centimètres. Le type de la fig. 1 est le plus simple et le moins dispendieux, mais il n'offre pas toutes les garanties désirables de solidité, car la section moyenne du prisonnier a, qui a à transmettre tout l'effort de torsion, n'est que le tiers environ de la section de l'arbre et offre par suite beaucoup moins de résistance que l'arbre lui-même. L'assemblage de la fig. 2 est supérieur au précédent, mais un peu plus couteux, en raison du travail qu'exige la préparation des deux demi-cylindres de jonction. Quant au dispositif de la fig. 3, qui est préférable aux deux premiers, il est encore d'un prix plus élevé.

L'assemblage représenté par la fig. 4 convient principalement pour les arbres d'un fort diamètre et en fonte; dans ce cas, la forme un peu compliquée de certaines parties, s'obtient sans difficulté et n'entraine qu'un supplément de dépense insignifiant; la jonction présente d'ailleurs de sérieuses garanties de solidité.

Résistance. La transmission complète d'une grande usine à plusieurs étages se compose ordinairement de trois parties: 1°, une transmission extérieure, qui reçoit directement la puissance des machines motrices, pour la conduire dans les bâtiments de l'usine, 2°, une transmission, composée d'un système d'arbres verticaux, pour amener cette puissance dans les différents étages; 3° enfin, une transmission intérieure qui amène la force dans les salles de travail pour la distribuer aux différentes machines outils. Dans la transmission extérieure, deux arbres consécutifs, réunis par un manchon, ont la même force à transmettre et doivent par suite avoir le même diamètre. La transmission verticale comprend ordinairement autant de parties qu'il y a d'étages, et généralement, à chacun d'eux, elle cède une partie de la force à un arbre faisant partie de la transmission intérieure; il en résulte évidemment qu'à chaque assemblage on doit avoir deux arbres

de diamètres différents; c'est également ce qui se produit pour les différentes parties de la transmission intérieure.

Mais, que les arbres à réunir aient des diamètres égaux au inégaux, il n'en est pas moins vrai qu'au point de jonction les deux extrémités des arbres doivent résister au même moment de torsion et il est par suite suffisant que ces extrémités et le manchon lui-même aient des dimensions qui leur permettent en réalité de résister au moment de torsion agissant sur l'arbre conduit; en d'autres termes, l'assemblage entier doit être déterminé d'après le diamètre de ce dernier arbre.

Les fig. 7, 8, 9 et 10 montrent l'accouplement d'un arbre conducteur A avec l'arbre conduit B, d'un diamètre plus faible. On voit que cet assemblage ne diffère de ceux que nous avons indiqués précédemment pour les arbres d'égal diamètre, qu'en ce que la surépaisseur de l'arbre conducteur A s'étend jusqu'au manchon.

Les dimensions du manchon d'accouplement doivent être choisies de manière à donner toute sécurité et en particulier l'épaisseur doit être assez forte pour qu'on n'ait pas à redouter une rupture, lorsqu'on chasse la clavette avec force. Il n'est évidemment pas possible d'indiquer une méthode rationnelle pour déterminer les dimensions à donner; nous nous bornerons à faire connaître les règles empiriques auxquelles nous a conduit l'examen attentif d'un certain nombre d'accouplements dont la construction était satisfaisante:

Longueur d'un manchon . . . . $l = 27 + 1{\cdot}9\, d$

Epaisseur de fonte du manchon . . . . . $\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\, d$

Largeur de la clavette . . . . $k = 0{\cdot}9\, \delta$

Epaisseur de la clavette . . . . $h = \frac{1}{2}\, k$

d désignant le diamètre de l'arbre conduit.

Pour le dispositif de la fig. 4. il est nécessaire de déterminer en outre le diamètre d_1 de la portée. En faisant:

$$d_1 = d \sqrt[3]{2} = 1{\cdot}23\, d$$

la résistance à la torsion du demi-cylindre de diamètre d_1 est précisément égale à celle du cylindre entier de diamètre d.

Pour l'assemblage de la fig. 1, les dimensions du prisonnier doivent être déterminées de manière à ce que sa résistance à la torsion soit égale à celle de chacune des deux portions de cercle.

C'est ce qui a lieu lorsque la résistance à la torsion de ce prisonnier est la moitié de celle de l'arbre conduit; en désignant par h la plus petite des dimensions de la section du prisonnier, on doit donc poser:

$$\frac{d^2 h^2}{3\sqrt{d^2 + h^2}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{16} d^3$$

d'où on tire:

$$\left(\frac{h}{d}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{32}\right)^2 \left[1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{32}{3\pi}\right)^2}\right]$$

et, par suite:

$$\frac{h}{d} = 0{\cdot}583.$$

Paliers.

La forme et la disposition des paliers se déterminent d'après la force des arbres, leur direction et surtout d'après le mode de fixation des paliers eux-mêmes; elles sont en effet très différentes suivant que le palier doit être fixé sur le sol, sur un mur ou sur un plancher.

Les planches XIV, XV et XVI représentent les dispositions les plus usitées.

Palier ordinaire. La fig. 1, pl. XIV est un palier pour arbre horizontal. L'ensemble comprend la plaque de fondation, le corps du palier, le couvercle et les deux parties du coussinet. La plaque de fondation n'est séparée du palier, comme sur la figure, que lorsque ce dernier doit être fixé sur une pierre ou sur des pièces de bois; mais lorsque le palier doit reposer sur un bâtis de machines, sa plaque de fondation fait corps avec le bâtis et vient de fonte avec lui. Dans le premier cas, la plaque est reliée à sa fondation par deux boulons et même par quatre pour les paliers de grandes dimensions.

Les surfaces de contact de la plaque de fondation et du corps du palier sont parfaitement dressées; le contact n'a lieu d'ailleurs qu'aux extrémités et au milieu; le chapeau pénètre dans le corps du palier et le contact a lieu sur des parties verticales. Quant aux deux moitiés du coussinet, elles sont en con-

tact avec le chapeau et le corps du palier par des surfaces cylindriques et viennent les recouvrir légèrement à l'extérieur. La plaque, le corps et le chapeau du coussinet, sont disposés de manière à ce que les boulons d'assemblage n'aient à résister qu'à des efforts de traction. Pour éviter les efforts de cisaillement, le corps du palier est maintenu par des cales entre deux saillies de la plaque de fondation et le chapeau est engagé dans le corps du palier sur une certaine hauteur.

D'ailleurs, pour des paliers de cette nature, il n'est nécessaire de recourir à une forte liaison avec les fondations que dans le cas où les forces agissant sur l'arbre n'ont pas pour résultat de produire une pression normale à la plaque de fondation.

Ainsi, en particulier, la fixation des paliers des arbres à manivelles doit se faire avec le plus grand soin et présenter beaucoup de solidité, car la direction suivant laquelle agit la pression de l'arbre sur son coussinet varie constamment avec la position de la manivelle. Dans les machines à vapeur à balancier, il est de la plus grande importance d'arriver à ce que la liaison de la plaque du palier avec la fondation, celle du corps du palier avec cette plaque et enfin celle du corps et du chapeau présentent assez de solidité pour qu'aucune de ces parties ne vienne à se séparer des autres, quand l'arbre tend à soulever le couvercle verticalement, par suite du mouvement de la machine; c'est d'ailleurs pour ces circonstances particulièrement défavorables que doivent être calculées les dimensions des boulons et des plaques.

La forme et les dimensions à donner à ces paliers ne peuvent évidemment être déterminées que par une méthode empirique reposant sur le sentiment des formes et des rapports à établir entre les différentes parties.

Pour arriver à découvrir les règles qu'il convient de suivre dans la construction des paliers, j'ai tracé avec le plus grand soin, et en grandeur naturelle, trois paliers de dimensions différentes, l'un très grand, l'autre très petit et le troisième intermédiaire entre les deux premiers; un examen approfondi de ces trois tracés m'a permis de reconnaitre: 1°, que l'épaisseur du métal des coussinets, rapportée au diamètre de l'arbre, devait être plus forte pour les arbres de petite dimension que pour ceux d'un fort diamètre; 2°, que les autres pièces des paliers devaient être établies géometriquement semblables pour les arbres

de tous les diamètres. Quant aux dimensions des coussinets, elles sont données par les règles suivantes.

Pour les arbres ou les tourillons qui ne doivent se mouvoir qu'avec une vitesse modérée, c'est-à-dire pour lesquels on n'a pas d'échauffement à redouter, la longueur du coussinet peut être prise égale à:

$$l = 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\,d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

l'épaisseur du métal:

$$e = 0{\cdot}28 + 0{\cdot}07\,d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

le diamètre extérieur du coussinet ou le diamètre du creux du corps et du chapeau du palier:

$$d_1 = 0{\cdot}69 + 1{\cdot}17\,d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Pour les arbres qui doivent avoir un mouvement de rotation très rapide, on pourrait recourir aux principes et aux règles exposées page 171; mais on préfère en général se borner à allonger les coussinet, comme l'indique la fig. 1, pl. XX; quant au palier lui-même on peut se contenter de le faire exactement, comme pour un coussinet de longueur normale.

Pour dessiner les différentes parties d'un parlier, il est très utile d'avoir un tracé normal fait avec beaucoup de soin, sur lequel se trouvent rapportées les dimensions principales exprimées en fonction du diamètre extérieur d_1 du coussinet; il est également bon d'y ajouter une échelle divisée en centièmes et construite en prenant pour unité la valeur d_1. La fig. 1, pl. XIV donne toutes les dimensions de paliers (avec $d_1 = 1$) qu'il est nécessaire de connaître pour l'étude d'un projet de machines. Lorsque tous les paliers doivent être construits d'après les règles que nous venons d'indiquer, il est parfaitement inutile, dans le projet, de faire le tracé lui-même des paliers et il suffit évidemment d'indiquer la longueur des plaques de fondation et la position des axes des boulons.

Les éléments principaux d'un palier sont:

1° La hauteur du palier. c'est-à-dire la hauteur de l'axe de l'arbre au-dessus du plan supérieur de la plaque de fondation . . . . $0{\cdot}9\,d_1$

2° La longueur de cette plaque entre les ergots de calage $3{\cdot}0\,d_1$

3° La largeur de la même plaque . . . . $1{\cdot}0\,d_1$

Le tableau suivant contient les dimensions des coussinets pour paliers horizontaux, calculées d'après les équations (1), (2) et (3).

Numéro du palier.	Diamètre intérieur du coussinet d (en centimètres)	Epaisseur du métal e (en centimètres)	Diamètre extérieur du coussinet d_1 (en centimètres)	Longueur du coussinet l (en centimètres)
I	3·00 3·25	0·520	4·49	4·80
II	3·50 3·75	0·558	5·08	5·40
III	4·00 4·50	0·613	5·96	6·31
IV	5·00 5·50	0·687	7·13	7·53
V	6·00 6·50	0·761	8·29	8·74
VI	7·00 7·50	0·853	9·47	9·94
VII	8·00 8·50	0·909	10·63	11·15
VIII	9·00 9·50	0·983	11·80	12·37
IX	10 11	1·094	13·56	14·18
X	12 13	1·242	15·90	16·60
XI	14 15	1·390	18·24	19·02
XII	16 17	1·540	20·58	21·44
XIII	18 19	1·686	22·92	23·86
XIV	20	1·760	24·09	25·07
XV	22	1·908	26·43	27·49
XVI	24	2·056	28·08	29·91
XVII	26	2·204	30·42	32·32
XVIII	28	2·350	33·45	34·75
XIX	30	2·500	35·79	37·17

Pour diminuer les dépenses d'établissement de modèles autant que possible, les dimensions extérieures des coussinets sont déterminées de manière à ce que le même palier puisse servir

pour deux diamètres d'arbres. De cette manière, on peut arriver à n'avoir que 19 modèles de paliers pour tous les arbres dont le diamètre est compris entre 3 et 30 centimètres.

Les fig. 2 et 3, pl. XIV représentent des chaises ou paliers suspendus. Le modèle de la fig. 3 est facile a établir et d'une forme très satisfaisante. mais il ne peut recevoir qu'un seul coussinet et doit par suite être laissé de côté, lorsqu'on a à établir des chaises qui doivent recevoir deux ou trois arbres. A ce point de vue, la forme représentée par la fig. 2, est préférable puisque, grâce à la section prismatique octogonale qu'elle présente à la partie inférieure. elle peut recevoir plusieurs arbres.

Les fig. 1 à 7, pl. XV représente une chaise triple.

La disposition de cette chaise se comprend suffisamment à l'inspection des figures, pour nous dispenser d'en donner une description détaillée.

Pour les dimensions à donner aux coussinets de ces chaises, on peut utiliser les règles et le tableau indiqués précédemment.

Les différentes dimensions du corps des paliers suspendus doivent. comme celles des autres paliers, être exprimées en fonction du diamètre d_1 du coussinet. Toutefois, la hauteur ne doit pas être prise proportionnelle à ce diamètre; elle se détermine d'après les diamètres des poulies et des roues à placer sur l'arbre, ou encore, comme nous le verrons plus tard, d'après le mode de construction de la charpente destinée à recevoir les semelles de ces paliers. La limite des diamètres des arbres, pour lesquels on peut employer des chaises de ce genre, peut être prise égale à 8 centimètres. Pour des arbres d'un diamètre supérieur à cette limite, on doit éviter de les surpendre à des planchers en bois, qui ont toujours plus ou moins de flexibilité, et dans lesquels il se produit, avec le temps, des déformations plus ou moins sensibles.

La fig. 4, pl. XIV, représente une disposition très simple de crapaudine pour le pivot d'un arbre vertical; on peut l'adopter toutes les fois qu'on n'a pas à redouter l'échauffement.

Paliers avec coussinets sphériques. Tous les paliers que nous venons de décrire ont l'inconvénient de ne présenter aucune flexibilité, d'être complétement rigides.

Il est par suite très difficile, pour ne pas dire impossible, d'arriver à les poser sans aucune erreur et surtout à les maintenir dans cet état. Un arbre supporté par des paliers de cette

nature ne peut arriver à tourner convenablement que lorsque tous les axes géometriques des coussinets tombent sur une seule et même ligne droite. Si donc on commet la plus petite erreur dans la pose d'un palier, ou si une plaque vient à s'écarter légèrement de sa position exacte, (ce qui dans les chaises peut être amené par une flexion de la charpente et dans les paliers, par un tassement de la pierre de fondation), la pression entre l'arbre et le coussinet cesse aussitôt d'être uniformément répartie, le frottement en certains points devient très énergique et finit par amener un échauffement.

On peut se mettre à l'abri de ces inconvénients, en donnant à la surface extérieure du coussinet la forme sphérique et en adoptant la même forme pour le vide du palier; c'est Bodmer qui le premier a fait usage de coussinets sphériques.

Les Fig. 1, 2, 3 et 4 pl. XVI représentent la disposition d'un coussinet de ce genre. Les Fig. 2 et 3 spécialement montrent que la sphère se trouve réduite en réalité à deux zones très étroites. On peut encore obtenir une mobilité complète avec un coussinet cylindrique, en le reliant invariablement au corps du palier et en rendant celui-ci mobile, en le suspendant au moyen d'un joint de Hook: mais dans ce cas la construction est encore beaucoup plus compliquée et plus difficile que celle des coussinets sphériques.

Si on réunit les différentes parties d'une ligne de transmission par des joints de Hook et si on fait reposer chacune de ces parties dans un palier muni d'un coussinet sphérique, ou suspendu par un joint de Hook, on constitue un système d'arbres susceptible de transmettre une force dans les conditions les plus satisfaisantes, lorsque toutefois les variations de position des paliers restent au-dessous d'une certaine limite. Une disposition de ce genre qu'on pourrait nommer arbre chaine, serait de nature à rendre les plus grands services dans les bâtiments à vapeur où elle pourrait être employée pour les arbres d'hélices.

La Fig. 5. pl. XVI représente une crapaudine mobile pour arbre vertical.

Paliers-chaises.

Lorsque deux ou plusieurs roues doivent engrener ensemble, il est indispensable, pour obtenir une marche satisfaisante, de

maintenir rigoureusement invariables les positions relatives des axes de ces roues. On arrive à ce résultat, en faisant usage des paliers-chaises, composés d'un corps en fonte, d'une forme analogue à celle des batis de machines; ces paliers se fixent sur une pierre de fondation, sur une poutre, contre un mur ou enfin sous un plancher et reçoivent les collets et les tourillons des arbres qui doivent être reliés les uns aux autres d'une manière invariable. La planches XVII, XVIII et XIX représentent une série de paliers-chaises employés dans les transmissions.

La planche XVII représente un palier de ce genre, destiné à recevoir un arbre horizontal et un arbre vertical; il est fixé sur une forte pierre de fondation noyée dans un massif de maçonnerie de moellons.

Les fig. 1, 2, 3 de la pl. XVIII, sont trois vues différentes d'une disposition employée pour recevoir deux arbres dont l'un est parallèle et l'autre perpendiculaire à la surface d'un mur.

La dispositon représentée par les fig. 4, 5, 6 pl. XVIII. convient au cas où un arbre vertical, parallèle à un mur, est rencontré par deux autres arbres horizontaux, également parallèles à la surface de ce mur.

Les Fig. 1, 2, 3, pl. XIX indiquent un modèle de batis. qui correspond au cas où un arbre, perpendiculaire à un mur, doit être rencontré par trois autres arbres parallèles à la surface de ce mur.

La disposition représentée par les fig. 4, 5, 6, pl. XIX, sert à supporter un arbre vertical rencontré par un autre arbre qui traverse un mur.

La construction des paliers de cette nature ne présente aucune difficulté; leur forme générale se trouve déterminée, dans chaque cas particulier, par les données mêmes de la question.

Lorsqu'on a par exemple, à établir une chaise pour deux arbres, on commence par tracer les arbres, les tourillons et les roues, puis alors les plaques des paliers, en observant avec le plus grand soin les règles indiquées page 188. Une fois ces plaques tracées, la forme de la chaise s'en déduit très simplement, en élargissant ces plaques, en donnant de la raideur aux parois et en ajoutant une plaque de fond destinée à réunir les diverses parties.

Lorsqu'au contraire on a à établir une chaise pour plus de deux arbres, il est préférable de commencer par tracer les arbres

et les plaques de paliers et de n'établir les roues qu'après, en les faisant aussi petites que possible. Ce tracé une fois achevé, la chaise se trouve complétement déterminée comme dans le cas précédent. En opérant de cette manière, on obtient toujours nne disposition très convenable des plaques de palier et par suite une construction de chaise très simple. Si au contraire, pour la construction d'une chaise à trois ou quatre arbres, on voulait procéder comme pour une chaise à deux arbres seulement, il pourrait arriver que l'espace entre les roues ne fût pas suffisant pour permettre de disposer convenablement les plaques de palier.

Il n'est pas possible d'établir de règles plus précises pour les constructions de ce genre, et du reste elles ne seraient d'aucune utilité pour ceux qui ont acquis quelque expérience dans les ateliers; le sentiment suffit à les guider lorsqu'ils ont une fois tracé les roues et les plaques de paliers. — Comme d'ailleurs la construction de chaises de cette nature est un des meilleurs exercices qu'on puisse faire pour se former, il est important pour les commençants de ne pas négliger cette occasion et de s'exercer à faire des tracés pour un grand nombre de cas différents. Ce qu'il y a de mieux à faire pour ces tracés, c'est de les exécuter. en grandeur naturelle, à la craie, sur des tableaux noirs; on peut ainsi se rendre parfaitement compte des dimensions de détails puisqu'elles se trouvent représentées en vraie grandeur. Les commençants ont généralement le défaut de faire beaucoup trop grand; ce défaut disparait petit à petit à mesure que leur habileté se développe et ils finissent par arriver à concentrer le tout dans un petit espace, en laissant cependant toutes les parties parfaitement accessibles.

Pour les arbres verticaux placés près des murs, on fait ordinairement la distance de l'arbre au mur égale à quatre fois, ou au plus cinq fois le diamètre.

L'épaisseur de métal des parois des chaises doit être déterminée par la règle empirique suivante.

$$\varDelta = 1 + 0{\cdot}07\ d$$

On a alors:

pour $d =$	10	12	14	16	18	20 centimètres
$\varDelta =$	1·7	1·84	1·98	2·12	2·26	2·40

Quand il s'agit de transmettre une certaine puissance dans les étages d'une fabrique, au moyen d'un arbre vertical, il est

convenable de donner au mur, dans la partie qui correspond à l'arbre, la même épaisseur à tous les étages, afin que les diverses chaises se trouvent également écartées de ce mur.

Poulies.

Pour transmettre le mouvement d'un arbre à un autre, on fait généralement usage de roues dentées ou de poulies munies de courroies. Ce dernier mode de transmission, qui n'est en réalité applicable que pour des forces relativement faibles, offre l'avantage de pouvoir s'employer pour des arbres assez éloignés l'un de l'autre.

Pour qu'une courroie puisse transmettre le mouvement d'une poulie à une autre, il est indispensable qu'elle soit suffisamment appliquée sur la circonférence de chaque poulie, par adhérence ou par frottement, pour en prendre exactement la vitesse. Lorsque cette condition se trouve remplie, les nombres de tours que font, dans le même temps, une minute par exemple, les deux arbres reliés par la courroie, sont inversement proportionnels aux rayon des poulies; ces deux arbres tournent d'ailleurs dans le même sens ou en sens contraire, suivant que les brins de la courroie sont tangents extérieurement ou intérieurement aux circonférences des poulies.

Tension des courroies. Les dimensions d'une courroie et par suite aussi celles des rayons des poulies se déterminent d'après les tensions que doivent avoir les deux brins pour que la courroie ne puisse pas glisser sur les tambours; nous devons donc commencer par chercher la valeur de ces tensions.

Si nous imaginons une courroie passant sur deux tambours et fortement tendue sur toute sa longueur, sa tension sera la même, tant que les axes ne seront soumis à aucun effort ou à aucune résistance.

Mais du moment où la poulie motrice se trouvera soumise à une force tendant à produire une rotation, et la poulie menée à une résistance correspondante, il se produira des changements dans la tension des différentes sections de la courroie. La puissance et la résistance étant supposées appliquées dans la direction des flèches de la fig. 2, pl. XX, il est clair que le brin $a\,b$ se trouve soumis à une tension considérable, le brin $a_1\,b_1$ à une tension plus faible, et que de a en a_1 et de b en b_1 la tension va en décroissant suivant une loi déterminée. Si l'on désigne

par T et T_1 les tensions en ab et a_1 b_1, par P la force motrice supposée appliquée à la circonférence de la poulie A, on a, pour l'état de repos comme pour celui de mouvement uniforme:

$$\left.\begin{array}{l} T = P + T_1 \\ \text{Ou} \qquad P = T - T_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cette relation reste rigoureusement exacte, quelles que soient les valeurs absolues de T et de T_1, tant que la courroie ne glisse pas sur les poulies. Elle s'appliquera donc encore au cas où les tensions n'auraient plus que les valeurs strictement nécessaires pour empêcher la glissement. Ces valeurs sont évidemment celles pour lesquelles le frottement fait équilibre à la force motrice P ou à la résistance qui a la même valeur. Cherchons donc à déterminer les minima de T et de T_1 pour lesquels le glissement est sur le point de se produire.

Si nous supposons les brins coupés entre les poulies et que nous appliquions à leurs extrémités des forces égales aux tensions T et T_1, nous ne modifierons en rien les conditions d'équilibre. Dans la portion de courroie a a_1 (fig. 3. pl. XX) qui s'applique sur la poulie A de a_1 en a, la tension va en croissant de T_1 à T, lorsqu'on passe du point a_1 au point a. Dans une section quelconque m, la tension a une certaine valeur S et, pour la section infiniment voisine n, cette valeur devient $S + dS$. Décomposons ces deux tensions suivant les lignes p O et q r, p étant le point d'intersection des directions de S et $S + dS$ et q r une ligne perpendiculaire à p O; en posant $m\,O\,a_1 = \varphi$, $m\,O\,n = \partial\varphi$, nous aurons:

$$S \sin \frac{1}{2}\, d\varphi + (S + dS) \sin \frac{1}{2}\, d\varphi$$

pour expression de la force qui tend à presser l'élément de courroie m n contre la poulie, et, en désignant par f le coefficient de frottement:

$$f\left[S \sin \frac{d\varphi}{2} + (S + dS) \sin \frac{d\varphi}{2}\right] \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

représentera le frottement correspondant à cette pression.

D'un autre coté, la force qui tend à déplacer l'élément de courroie suivant la direction p r a pour valeur:

$$(S + d S) \cos \frac{d \varphi}{2} - S \cos \frac{d \varphi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Comme nous avons admis que les tensions T et T_1 étaient précisément celles qui correspondent à la limite de glissement, cette dernière force doit nécessairement être égale à la résistance due au glissement: par conséquent, pour ces minima de valeurs de T et T_1, on doit avoir la relation:

$$f \left[S \sin \frac{1}{2} d \varphi + \sin (S + d S) \sin \frac{1}{2} d \varphi \right] =$$

$$(S + d S) \cos \frac{1}{2} d \varphi - S \cos \frac{1}{2} d \varphi.$$

Comme $d S$ et $d \varphi$ sont des infiniment petits, on peut poser:

$$\sin \frac{1}{2} d \varphi = \frac{1}{2} d \varphi, \qquad \cos \frac{1}{2} d \varphi = 1;$$

en négligeant en outre les termes qui contiennent les produits de deux différentielles, l'équation précédente se réduit à:

$$f S d \varphi = d S$$

qui, par l'intégration, donne:

$$\text{Log. nat. } S = f \varphi + \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cette relation représente la loi suivant laquelle la tension S varie avec l'angle φ.

Maintenant, on a pour $\varphi = o$, $S = T_1$ et pour $\varphi = a O A_1 = \alpha_1$, $S = T$. L'équation (4) donne par suite:

$$\text{Log. nat. } T_1 = o + \text{const.}$$

$$\text{Log. nat. } T = f \alpha + \text{const.}$$

d'où, par différence:

$$\text{Log. nat. } \frac{T}{T_1} = f \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

et par consequent:

$$T = T_1 e^{f \alpha}$$

où $e = 2,71828$ représente la base des logarithmes népériens.

Des équations (1) et (6) on déduit:

$$\left.\begin{aligned} T &= P \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \\ T_1 &= P \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

La tension t qui s'exerce uniformément sur toute la longueur de la courroie, quand on supprime la puissance et la résistance, est égale à $\frac{1}{2}$ $(T + T_1)$; on a, par conséquent:

$$t = \frac{1}{2} P \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

En désignant par s la longueur totale de l'arc $a\,p\,a_1$, sur lequel la courroie reste en contact avec la poulie, par R le rayon de cette poulie, on a:

$$\alpha = \frac{s}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Les formules (7), (8), (9) permettent, comme on le voit, de calculer les valeurs minima des tensions, pour lesquelles le glissement entre la poulie et la courroie est sur le point de se produire.

D'après les experiences de Morin, on peut admettre pour le coefficient f les valeurs suivantes:

1° Courroies grasses ordinaires sur tambours en bois $f = 0{\cdot}47$
2° Courroies neuves sur tambours en bois $f = 0{\cdot}50$
3° Courroies grasses ordinaires sur poulies en fonte tournées . . . . $f = 0{\cdot}28$
4° Courroies humides sur poulies en fonte tournées $f = 0{\cdot}38$
5° Cordes en chanvre sur poulies en bois . . . . $f = 0{\cdot}50$

Pour les besoins ordinaires de la pratique, les formules (7) et (8) sont beaucoup trop compliquées; mais il est possible d'en tirer des résultats très simples en se bornant aux cas qui se présentent le plus fréquemment, dans lesquels on fait usage de courroies grasses sur poulies en fonte tournées et où l'angle correspondant à l'arc α est très sensiblement egal à 180°. Si, dans les formules (7) et (8), on fait:

$$f = 0{\cdot}28, \quad \alpha = \pi = 3{\cdot}142, \quad e = 2{\cdot}718$$

on trouve:

$$e^{f\alpha} = (2{\cdot}718)^{0{\cdot}28 \times 3{\cdot}142} = 2{\cdot}41$$

et par suite:

$$T = 1{\cdot}8\ P, \quad T_1 = 0{\cdot}8\ P, \quad t = 1{\cdot}3\ P.$$

On doit remarquer toutefois que, dans les applications. pour qu'il n'y ait pas glissement, il importe que les tensions réelles soient légèrement supérieures à ces valeures limites et il convient dès lors de prendre, pour base des calculs,

$$T = 2\ P, \quad T_1 = P, \quad t = 1{\cdot}5\ P \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (10)$$

Le tableau suivant permet d'ailleurs de calculer les tensions des courroies pour différentes valeurs de l'arc embrassé sur la poulie.

$\frac{s}{2 R \pi}$	Valeur de $e^{f \frac{s}{R}}$					
	Courroies neuves sur poulies en bois.	Courroies ordinaires		Courroies humides sur fer.	Cordes sur poulies en bois	
		sur bois.	sur fer.		non polies.	polies.
0·2	1·87	1·81	1·42	1·61	1·87	1·51
0·3	2·57	2·43	1·70	2·05	2·57	1.86
0·4	3·51	3·26	2·02	2·60	3·51	2·29
0·5	4·81	4·38	2.41	3·30	4·81	2·82
0·6	6·59	5·88	2.87	4·19	6·59	3·47
0·7	9·00	7·90	3·42	5·32	9·02	4.27
0.8	12·34	10·61	4·08	6 75	12·34	5·25
0·9	16·89	14·27	4·87	8·58	16·89	6·46
1·0	23·15	19·16	5·81	10.89	23·15	7·95

Dimensions des courroies et des poulies. En désignant par β la largeur d'une courroie, par δ son épaisseur et par A la tension qu'on peut admettre par unité de surface pour le brin menant, on doit poser

$$A\ \beta\ \delta = T$$

ou. comme dans la plupart des cas on peut prendre $T = 2\ P$,

$$A\ \beta\ \delta = 2\ P \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (11)$$

Cette équation permet de calculer la section $\beta\delta$ de la courroie, lorsqu'on connait à la fois la puissance P, qui est supposée agir à la circonférence de la poulie, et la tension qu'on

peut faire supporter sans danger à la matière dont la courroie est formée. Mais lorsqu'il s'agit d'établir une transmission par poulies, P n'est presque jamais donné directement; on ne connait en général que le travail à transmettre exprimé en chevaux et les nombres de tours que doivent faire les arbres; la formule (1) n'est donc pas directement applicable et, pour arriver à une règle pratique, nous allons recourir à la méthode des rapports. Désignons par d le diamètre d'un arbre de transmission, auquel correspond un moment de torsion PR; en vertu de l'équation (4), page 59, nous aurons

$$P\,R = T\,\frac{\pi}{16}\,d^3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

L'élimination de P entre les 2 équations (11) et (12) donne

$$\frac{1}{2}\,A\,\beta\,\delta\,R = \frac{\pi}{16}\,T\,d^3 \quad \dots\dots\dots \quad (13)$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{\beta}{d} = \frac{\frac{\pi}{16}\,T}{\frac{1}{2}\,A\,\frac{\delta}{d}}\,\frac{d}{R} \quad \dots\dots\dots \quad (14)$$

Or, dans tous les cas de la pratique, $\frac{1}{2}\,A\,\frac{\delta}{d}$ a une valeur sensiblement constante, car si la force à transmettre est considérable, c'est-à-dire si d a une grande valeur, on doit recourir à une courroie plus épaisse et plus forte; il en résulte que le produit A δ augmente très sensiblement dans le même rapport que δ et que, par suite, le facteur $\frac{1}{2}\,A\,\frac{\delta}{d}$ peut être considéré comme constant. En admettant pour ce facteur la valeur 1·55, on a, pour déterminer l'épaisseur δ de la courroie, la relation:

$$\delta = 3{\cdot}1\,\frac{d}{A} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

On doit d'ailleurs prendre pour A le cinquième environ de la valeur absolue du cuir; on a ainsi, pour les valeurs de A correspondant à différentes espèces de cuir:

Cuir de mouton . . .	A = 22
Cuir de veau	„ = 25
Cuir de cheval (blanc).	„ = 54
Cuir de cheval (mince).	„ = 44
Cuir de vache . . .	„ = 54

Si on calcule le diamètre d d'après la formule $d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$, N représentant le nombre de chevaux qui correspond au moment P R et n le nombre de tours par minute, en prenant le coefficient 90 que nous avons indiqué pour la fonte, page 173, on tire de l'équation (14):

$$\frac{\beta}{d} = 10{\cdot}5 \frac{d}{R} \qquad (17)$$

Cette formule donne

pour $\frac{R}{d} =$	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\beta}{d} =$	2·6	2·1	1·75	1·50	1·31	1·16	1·05

Il ne faut pas oublier que ces règles sont établies, en admettant la tension T du brin menant égale à 2 P, c'est-à-dire au double de la puissance, supposée ramenée à la circonférence de la poulie.

Si on pose pour abréger:

$$k = \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1}$$

on a

$$T = k P \qquad (18)$$

Si on refait les calculs que nous venons d'indiquer, en remplaçant partout 2 P par k P, l'équation (14) devient:

$$\frac{\beta}{d} = \frac{k \frac{\pi}{16} T}{A \frac{\delta}{d}} \frac{d}{R} \qquad (19)$$

Ou, en tenant compte de la relation expérimentale (16):

$$\delta = 3{\cdot}1 \frac{d}{A}$$

$$\frac{\beta}{d} = 5{\cdot}25 \, k \frac{d}{R} \qquad (20)$$

Avec le coefficient de frottement $f = 0.28$, on trouve

pour $\alpha =$	60°	90°	120°	180°	210°	240°
$e^{f\alpha} =$	1·340	1·552	1·797	2·409	2·789	3·229
$k =$	3·94	2·81	2·26	1·71	1·55	1·44

Ces résultats permettent de calculer les courroies pour des valeurs de l'arc embrassé notablement différentes de 180°.

La largeur des poulies doit étre légèrement supérieure à celle des courroies; nous admettrons comme règle la relation

$$b = \frac{5}{4}\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Les dimensions du moyeu de la poulie et de la clavette ne peuvent étre déterminées que par des règles empiriques, établies en comparant des types bien exécutés; on trouve ainsi (Fig. 1 et 2 pl. XXI):

Diamètre de la portée de l'arbre qui reçoit la poulie	$= 1{\cdot}35\ d$	(22)
Epaisseur du moyeu de la poulie	$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ d$	
Longueur du moyeu, mesurée suivant l'axe, égale à la largeur de la poulie b . . .	$= \frac{5}{4}\ d$	
Largeur de la clavette	$= 0{\cdot}9\ d$	
Epaisseur de la clavette	$= 0{\cdot}45\ d$	

Pour déterminer les bras, on peut recourir à la méthode des rapports qui fournit une règle simple.

Bien que le nombre N des bras d'une poulie soit arbitraire entre certaines limites, il dépend cependant nécessairement du raport $\frac{R}{d}$ du rayon de la poulie au diamètre de l'arbre, puisque ce rapport correspond à la force à transmettre; comme ce rapport peut ne pas être un nombre entier, on prend pour N le nombre entier qui se rapproche le plus du rapport $\frac{R}{d}$

On donne ordinairement à la section des bras la forme elliptique, qui est facile à exécuter et qui de plus a l'avantage de n'éprouver qu'une faible résistance de la part de l'air; quant aux dimensions absolues d'un bras, elles s'obtiennent de la manière suivante.

Pour déterminer les arbres, nous avons fait usage de la formule (12). Or, si nous désignons par h la dimension d'un bras, mesurée dans le plan de la poulie, par h_1 l'épaisseur du bras à son encastrement dans le moyeu, on a, d'après la theorie, pour le moment d'élasticité, $\sigma \frac{\pi}{32} h_1 h^2 = \sigma \frac{\pi}{32} \left(\frac{h_1}{h}\right) h^3$

Nous pouvons admettre que la force P, appliquée tangentiellement à la poulie, tend à détacher également tous les bras du moyeu et, par suite, $\frac{P}{N}R$ représente le moment de l'effort exercé sur un seul bras; on a alors:

$$\frac{PR}{N} = \frac{a\,\pi}{32}\left(\frac{h_1}{h}\right)h^3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (23)$$

L'élimination de PR entre cette équation et la relation (12) donne:

$$\frac{T\,\pi}{16}\,d^3 = N\,\frac{a\,\pi}{32}\left(\frac{h_1}{h}\right)h^3$$

d'où on tire:

$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt[3]{\frac{2\,T}{a}\,\frac{h}{h_1}}}{\sqrt[3]{N}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (24)$$

Comme le rapport $\frac{h}{h_1}$ supposé constant, le numérateur du second membre est lui même constant et l'expérience indique qu'il peut être pris égal à 1·7; on a par suite:

$$\frac{h}{d} = \frac{1{\cdot}7}{\sqrt[3]{N}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (25)$$

Cette formule donne les résultats suivants:

pour $N =$	4	6	8	10
$\frac{h}{d} =$	1·08	0·94	0·86	0·79

Nous donnerons le nom de grandeur relative de la poulie au quotient $\frac{R}{d}$, qui exprime le rapport entre le rayon de cette poulie et le diamètre de l'arbre, calculé pour la force à transmettre.

Lorsque toute la puissance de l'arbre moteur doit être intégralement transmise par courroie à l'arbre mené, la valeur de d à introduire dans le calcul est celle du diamètre réel de l'arbre moteur. Lorsqu'au contraire une partie seulement du travail de cet arbre doit être transmise à l'arbre mené, la valeur de d à introduire dans le calcul de la poulie n'est plus celle du diamètre réel de l'arbre moteur, mais bien celle d'un diamètre fictif

calculé d'après la force à transmettre et la vitesse de la poulie. Ce mode de détermination de d se trouvera du reste expliqué plus loin par la discussion de quelques exemples.

Le rayon de la plus grande des deux poulies dans une transmission par courroie doit en général être pris égal à 6 ou 7 fois le diamètre d, et ce n'est que dans le cas où on veut avoir une très grande différence entre les vitesses de l'arbre moteur et de l'arbre mené qu'on prend, pour le rayon de la poulie, 8 ou 10 fois le diamètre d.

Si on examine les règles que nous venons d'établir, on peut remarquer qu'en vertu de ces règles toutes les poulies d'une même grandeur relative ont des formes géométriquement semblables, car pour une valeur déterminée de $\frac{R}{d}$, tous les autres rapports:

$$\frac{\beta}{d}, \quad \frac{b}{d}, \quad N = \frac{R}{d}, \quad \frac{h}{d},$$

ont des valeurs constantes. Nos règles donnent:

$$\text{pour } \frac{R}{d} = 6$$

$$\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}5, \quad \frac{b}{d} = 1{\cdot}9, \quad N = 6, \quad \frac{h}{d} = 0{\cdot}94$$

ces rapports sont ceux qu'un trouve généralement dans la pratique où, dans la plupart des cas, la grandeur relative des poulies ne s'écarte pas beaucoup de 6 ou 7.

Quelques exemples feront mieux comprendre l'usage des règles précendentes.

Premier exemple. L'arbre moteur a (fig. 4, pl. XX) donne un travail de 8 chevaux et fait 128 tours par minute; on veut transmettre intégralement ce travail à l'arbre b qui doit faire 256 tours par minute.

On a dans ce cas:

Diamètre de l'arbre moteur $16\sqrt[3]{\frac{8}{128}}$ . . . . $= 6{\cdot}3$

Diamètre de l'arbre mené $16\sqrt[3]{\frac{8}{256}}$ . . . . $= 5{\cdot}2$

Grandeur relative de la poulie A . . . . $= 7$

Rayon de la poulie A, $7 \times 6{\cdot}3$ . . . . $= 44{\cdot}1$

Rayon de la poulie B, $\frac{1}{2}\ 44{\cdot}1$ . . . . $= 22{\cdot}05$

Largeur de la courroie $\beta = 1{\cdot}5 \times d = 1{\cdot}5 \times 6{\cdot}3$ . . $= 9{\cdot}45$

Largeur des poulies $\frac{5}{4} \times 9{\cdot}45$ . . . . $= 11{\cdot}81$

Dimensions de la clavette { largeur $0{\cdot}9 \times 6{\cdot}3$ . . . . $= 5{\cdot}7$
épaisseur $0{\cdot}45 \times 6{\cdot}3$ . . . $= 2{\cdot}8$

Nombre des bras { poulie A . . . . $= 6$
poulie B . . . . $= 4$

Dimensions des bras { pour A, $h = 0{\cdot}94 \times 6{\cdot}3$. . . . $= 5{\cdot}9$
„ B, $h = 1{\cdot}08 \times 5{\cdot}2$. . . . $= 5{\cdot}7$

Deuxième exemple. Les données (fig. 5, pl. XX) sont les suivantes:

Travail en chevaux sur l'arbre moteur a . . . . $= 12$
Nombre de tours de l'arbre a par minute . . . . . . $= 120$
Travail à transmettre à l'arbre b . . . . $= 4$
Nombre de tours de cet arbre par minute . . . . . . $= 240$

On trouve d'abord:

Diamètre réel de l'arbre $a = 16 \sqrt[3]{\frac{12}{120}}$ . . . . $= 7{\cdot}4$

Diamètre réel de l'arbre $b = 16 \sqrt[3]{\frac{4}{240}}$ . . . . $= 4$

Pour le calcul de la poulie A, on doit partir, non du diamètre réel de l'arbre a, mais d'un diamètre fictif correspondant à 4 chevaux et 120 tours; on a ainsi:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{4}{120}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; = 5{\cdot}1$$

et on obtient par suite:

Grandeur relative de la poulie A . . . . $= 7$
Diamètre de la poulie $A = 7 \times 5{\cdot}1$ . . . . $= 35{\cdot}7$
Diamètre de la poulie $B = \frac{35{\cdot}7}{2}$ . . . . $= 17{\cdot}85$
Grandeur relative de la poulie B, $\frac{17{\cdot}85}{4}$ . . . . . . $= 4{\cdot}4$
Largeur de la courroie $1{\cdot}5 \times 5{\cdot}1$ . . . . $= 7{\cdot}65$
Largeur des poulies $\frac{5}{4} \times 7{\cdot}65$ . . . . $= 9{\cdot}56$

Nombre des bras { A . . . . $= 6$
B . . . . $= 4$

Dimensions des bras { A. $0{\cdot}94 \times 5{\cdot}1$ . . . . $= 4{\cdot}8$
B, $1{\cdot}08 \times 4$ . . . . $= 4{\cdot}3$

Epaisseur du moyeu { A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 5{\cdot}1$ . . . . . . $= 2{\cdot}20$
B, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 4$ . . . . $= 1{\cdot}83$

Troisième exemple. (Fig. 6, pl. XX.) On donne un arbre a a dont le diamètre est de 10 centimètres; le quart du travail de cet arbre doit être transmis à la poulie B et se répartir également sur chacune des parties b b et b_1 b_1: la poulie B doit faire un nombre de tours double de celui de la poulie A.

Si nous désignons par N le travail inconnu de l'arbre a a et par n le nombre de tours qu'il fait par minute, nous aurons, entre ces quantités et le diamètre connu D = 10, la relation:

$$10 = D = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

D'après les données, la partie d'arbre a_1 a_1 doit transmettre $\frac{3}{4}$ N chevaux avec une vitesse de n tours par minute; par suite le diamètre de cette partie a_1 a_1 doit être égal à $16 \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{N}{n}} =$

$D \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0{\cdot}908\ D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 9{\cdot}08$

Le diamètre des parties b b et b_1 b_1 est égal à

$16 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} N}{2\ n}} = \frac{D}{\sqrt[3]{16}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 4{\cdot}00$

La poulie A transmettant $\frac{1}{4}$ N avec une vitesse de n tours, le diamètre fictif à employer pour le calcul de cette poulie est $16 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{4} N}{n}} = D \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \ldots\ldots = 6{\cdot}30$

Pour le calcul des bras de la poulie B, le diamètre fictif à employer est $16 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{4} N}{2\ n}} = 0{\cdot}5\ D \ldots\ldots\ldots = 5{\cdot}00$

On obtient alors, à l'aide de ces premières déterminations:

Grandeur relative de la poulie A . . . . = 7

Rayon de la poulie A, $7 \times 6{\cdot}3$ . . . . = 44·1

Rayon de la poulie B $\frac{1}{2} \times 44{\cdot}1$ . . . . = 22·05

Grandeur relative de la poulie B $\frac{22{\cdot}05}{5}$ approximativement = 4

Largeur de la courroie $1{\cdot}5 \times 6{\cdot}3$ . . . . = 8·45

Largeur des poulies $\frac{5}{4} \times 8{\cdot}45$ . . . . = 10·5

Epaisseur du moyeu	A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 6{\cdot}3$	$= 2{\cdot}6$
	B, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 5{\cdot}0$	$= 2{\cdot}2$
Nombre des bras	A	$= 6$
	B	$= 4$
Dimensions des bras	A, $0{\cdot}94 \times 6{\cdot}3$	$= 6{\cdot}0$
	B, $1{\cdot}08 \times 5{\cdot}0$	$= 5{\cdot}4$

Quatrième exemple. Données:

Nombre de tours de l'arbre moteur, par minute 80
Nombre de tours de l'arbre conduit, par minute 160
Travail total en chevaux à transmettre 40

Faisons remarquer tout d'abord que, si on avait en réalité à transmettre une force de 40 chevaux, prise sur un arbre faisant 80 tours par minute, on ne devrait pas employer des poulies, mais des engrenages, et l'exemple que nous avons choisi nous servira simplement à montrer que les courroies ne se prêtent pas à la transmission de forces aussi considérables.

Avec une seule paire de poulies, le problème proposé ne peut recevoir de solution, car les règles que nous avons établies conduisent à des dimensions inadmissibles.

On trouve en effet:

Diamètre de l'arbre moteur $d = 16\sqrt[3]{\frac{40}{80}}$ . . . . 13 centim.
Rayon de la poulie motrice, 7×13 . . . . 91 „
Largeur de la courroie $1{\cdot}5 \times 13$ . . . . 20 „
Epaisseur de la courroie, d'après la formule (16) (en prenant du cuir de cheval, pour lequel $A = 44$),
$\delta = \frac{3{\cdot}1 \times 13}{44}$ . . . . 1 „

Il faudrait donc employer une courroie double de 20 centimètres de largeur, car l'épaisseur du cuir de cheval est au plus de 0·5.

Si on voulait dans ce cas faire usage d'une transmission par courroies, il serait préférable d'augmenter le nombre de couples de poulies, et le porter à 2 ou à 3. Prenons, par exemple, 3 paires de poulies comme dans la fig. 7, pl. XX: chacune d'elles aura à transmettre $\frac{40}{3} = 13.3$ chevaux.

Le diamètre fictif qui servira à calculer les poulies

menantes sera, par suite, $d = 16 \sqrt[3]{\frac{13 \cdot 3}{80}}$ . . . . . . $= 8 \cdot 7$

Rayon d'une de ces poulies $7 \times 8 \cdot 7$ . . . . $= 60 \cdot 9$

Rayon d'une des poulies menées $\frac{60 \cdot 9}{2}$ . . . . $= 30 \cdot 45$

Largeur de la courroie $8 \cdot 7 \times 1 \cdot 5$ . . . . $= 13$

Epaisseur du cuir (cuir de cheval) $\frac{3 \cdot 1 \times 8 \cdot 7}{44}$ . . . . $= 0 \cdot 6$

Avec ces dimensions, l'installation deviendrait réalisable, mais, à moins de circonstances exceptionnelles, elle ne saurait être recommandée: l'emploi de roues d'engrenages donnerait une solution plus simple et en général plus satisfaisante.

Des courroies. Au point de vue des applications, les courroies donnent lieu à plusieurs remarques importautes.

Bien qu'il soit assez difficile d'établir d'une manière absolue les limites entre lesquelles les transmissions par courroies sont applicables, on peut cependant, en se basant sur les faits de la pratique, poser comme règle que, pour les courroies les plus faibles, en cuir simple, il convient de ne pas descendre au-dessous d'une largeur de quatre centimètres et que, pour les courroies les plus fortes, en cuir double, on ne doit pas dépasser vingt centimètres. Les courroies les plus faibles correspondent à des arbres de trois centimètres, les plus fortes à des arbres de treize. Mais, comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'emploi de doubles courroies sur de semblables largeurs est peu satisfaisant et doit être évité autant que possible. D'un autre côté, les courroies minces présentent d'assez graves inconvénients, qui doivent faire limiter leur emploi: elles s'allongent notablement, surtout lorsqu'elles sont neuves, leur tension diminue assez rapidement, elles adhérent mal aux poulies et finissent souvent par glisser, sans produire d'entrainement.

Pour empêcher le glissement des courroies sur les poulies, on donne à la surface de ces dernières une forme légèrement bombée; dans ce cas, la courroie porte surtout sur la partie milieu et tend par là-même à conserver une position invariable. Si la surface de la poulie était exactement cylindrique ou même légèrement concave, la courroie porterait principalement sur les bords et, pour peu que l'un des côtés présentât plus d'adhérence que l'autre, elle glisserait du côté où se produirait la plus forte tension.

La jonction des courroies à leurs extrémités donne lieu à de sérieuses difficultés, surtout lorsqu'il s'agit de fortes dimensions. Ces difficultés tiennent aux allongements que les courroies prennent nécessairement pendant le travail; il faut donc que le mode de jonction satisfasse à la double condition de présenter une résistance suffisante et de pouvoir se faire ou se défaire rapidement; enfin, il faut de plus que l'assemblage permette de donner tout d'abord au cuir une assez grande tension.

Pour arriver à réaliser ces conditions, on peut faire usage de différents modes de jonction. — Pour les courroies minces, on se borne à superposer les deux bouts sur une longueur de 20 à 24 centimètres, en les réunissant par des lanières minces, comme l'indique la fig. 8. pl. XX.

On peut également employer la mode de jonction par boucles que représente la fig. 9. Cet assemblage offre peu de solidité, car les trous percés dans le cuir se déchirent assez rapidement, mais il a l'avantage de permettre de resserrer à volonté les courroies et par suit de modifier facilement leur tension.

Pour les courroies très fortes, on a généralement recours au mode de jonction par rivets, tel que le représente la fig. 10 pl. XX. Dans ce cas, il est nécessaire d'établir deux ou trois lignes de rivets pour donner à l'assemblage une résistance à peu près équivalente à celle de la courroie.

En désignant par e la distance de deux rivets d'une même file, par d le diamètre d'un rivet, par i le nombre de files, on peut déterminer ce nombre i par la relation:

$$i = \frac{e}{d} - 1$$

pour $\frac{e}{d} = 2 \quad 3 \quad 4$

on a $i = 1 \quad 2 \quad 3$

Avantages et inconvénients des transmissions par courroies. Les avantages que présentent les courroies pour transmettre le mouvement sont de plusieurs sortes: 1°, elles permettent d'éviter à peu près complétement les chocs et les vibrations, lors même que le mouvement est très rapide; 2°, l'écartement des axes des poulies peut être très considérable, 10 ou 12 fois, par exemple, le diamètre des poulies; 3°, les chocs qui se produisent dans

l'arbre moteur ne se transmettent pas à travers la courroie; 4°, la liaison des deux arbres peut s'établir ou se supprimer très facilement à l'aide de poulies fixes et folles et de débrayages; 5°, enfin, on peut changer à volonté le sens de la rotation de l'arbre mené, en employant des courroies droites ou croisées.

Quant aux inconvénients de ce mode de transmission, on peut les résumer ainsi qu'il suit: 1°, l'emploi des courroies est limité; il ne doit pas être admis, en général, pour des résistances considérables; 2°, le mouvement n'est pas complétement assuré, par suite des glissements qui se produisent entre les poulies et la courroie, lorsque les tensions de cette dernière ne sont pas suffisantes; 3°, la tension des courroies donne lieu à des frottements assez considérables et a pour résultat de presser fortement les arbres contre leurs coussinets; le frottement qui en est la conséquence est notablement supérieur à celui que produisent les roues d'engrenages bien établies; 4°, les courroies s'allongent, surtout lorsqu'elles sont neuves et elles sont très exposées à tomber, notamment lorsqu'elles commandent des arbres verticaux.

Rouleaux tendeurs.

Dans certains cas, pour donner aux courroies des tensions convenables, on a recours à ce qu'on appelle des rouleaux tendeurs: ces rouleaux exercent une certaine pression sur les courroies, soit directement au moyen d'un poids, comme dans la fig. 11 pl. XX, soit indirectement par l'intermédiaire d'un levier, à l'extrémité duquel agit une charge convenable. Nous allons chercher à déterminer la pression que doit exercer un rouleau de ce genre pour donner une tension susceptible d'empêcher le glissement relatif de la courroie et des poulies.

Supposons qu'avant l'action du rouleau et l'application de la puissance et de la résistance, on ait préalablement tendu la courroie; soit t la valeur de cette tension, en vertu de laquelle il se produit un allongement qui a pour expression $\frac{t\,L}{\varepsilon\,\Omega}$, L représentant la longueur initiale de la courroie, Ω sa section et ε le coefficient d'élasticité de la matière. Imaginons maintenant qu'on vienne appliquer le rouleau tendeur contre le brin mené, avec une force q suffisante pour qu'il ne se produise pas de glissement, lorsqu'on fera agir sur la poulie menante la puissance P et

sur la poulie conduite la résistance P. Il s'établira alors dans le brin conducteur A A_1 une certaine tension T_1 et dans le brin conduit C C_1 une autre tension T_2.

Si l'on admet que le poids déterminant la tension soit exactement celui pour lequel le glissement de la courroie cesse de se produire, nous aurons, comme nous l'avons vu page 198:

$$T_1 = T_2\, e^{f \alpha_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

α_1 étant l'angle (exprimé en fraction du rayon) qui correspond à l'arc d'enroulement de la courroie sur la plus petite poulie.

Si on désigne par σ la tension en un point quelconque m de la poulie B, on a (page 198):

$$\sigma = T_2\, e^{f \varphi}$$

L'allongement de la partie de la courroie en contact avec la poulie B est la somme de tous les allongements partiels dus aux différentes tensions pour tous les points compris entre C et A et il a, par suite, pour expression, d'après les lois de l'élasticité:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sigma R\, d\varphi}{\Omega\, \epsilon} = \int_0^{\alpha} \frac{R\, T_2}{\Omega\, \epsilon}\, e^{f \varphi}\, d\varphi = \frac{R\, T_2}{\Omega\, \epsilon\, f}\, e^{f \alpha}$$

On trouverait de la même manière que $\frac{r\, T_2}{\Omega\, \epsilon\, f}\, e^{f \alpha_1}$ représente l'allongement de l'arc A_1 C_1. Si on désigne par l la longueur naturelle A A_1 de l'un des brins en ligne droite, $\frac{l\, T_1}{\epsilon\, \Omega}$ et $\frac{l\, T_2}{\epsilon\, \Omega}$ représentent les allongements correspondant aux tensions T_1 et T_2. Par conséquent, la courroie entière a subi, par rapport à sa longueur naturelle, un allongement total ayant pour expression:

$$\frac{R\, T_2}{\Omega\, \epsilon\, f}\, e^{f \alpha} + \frac{r\, T_2}{\Omega\, \epsilon\, f}\, e^{f \alpha_1} + \frac{l\, T_1}{\epsilon\, \Omega} + \frac{l\, T_2}{\epsilon\, \Omega}$$

Or, cet allongement relatif doit être égal à l'allongement $\frac{L\, t}{\Omega\, \epsilon}$ dû à la tension initiale, augmenté de l'allongement $\frac{1}{2}\, x^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ dû à l'action du poids du tendeur; nous aurons donc la relation:

$$\frac{R\, T_2}{\Omega\, \epsilon\, f}\, e^{f \alpha} + \frac{r\, T_2}{\Omega\, \epsilon\, f}\, e^{f \alpha_1} + \frac{l\, T_1}{\epsilon\, \Omega} + \frac{l\, T_2}{\epsilon\, \Omega} = \frac{L\, t}{\epsilon\, \Omega} + \frac{1}{2}\, x^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (2)$$

$x = g\,h$ représentant la quantité dont s'est abaissé le rouleau ou la flèche de la courroie, $a = C\,h$ et $b = C_1\,h$ désignant les distances du rouleau aux points de contact C et C_1. Si on néglige la différence qui existe a et a_1 et si l'on tient compte de l'équation (1), l'expression (2) devient:

$$\frac{R\,T_1}{\Omega\,\varepsilon\,f} + \frac{r\,T_1}{\Omega\,\varepsilon\,f} + \frac{l\,T_1}{\varepsilon\,\Omega} + \frac{l\,T_2}{\varepsilon\,\Omega} = \frac{L\,t}{\Omega\,\varepsilon} + \frac{1}{2}\,x^2\left(\frac{1}{a}\;\frac{1}{b}\right)$$

d'où on tire:

$$x = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\left(\frac{R\,T_1}{\Omega\,\varepsilon\,f} + \frac{r\,T_1}{\Omega\,\varepsilon\,f} + \frac{l\,T_1}{\varepsilon\,\Omega} + \frac{l\,T_2}{\varepsilon\,\Omega} - \frac{L\,t}{\Omega\,\varepsilon}\right)} \quad . \quad (3)$$

Or on a approximativement:

$$T_2\,\frac{x}{a} + T^2\,\frac{x}{b} = q$$

Ou:

$$q = T_2\,x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

En remplaçant dans le second membre x par la valeur tirée de l'équation (3), on trouve:

$$q = T_2\sqrt{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{1}{\Omega\,\varepsilon}\left(\frac{R\,T_1}{f} + \frac{R\,T_1}{f} + l\,T_1 + l\,T_2 - L\,t\right)}$$

Ou encore:

$$q = T_2\sqrt{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{T_1}{\Omega\,\varepsilon}\left(\frac{R}{f} + \frac{r}{f} + l + l\,\frac{T_2}{T_1} - L\,\frac{t}{T_1}\right)} \quad (4)$$

Ou enfin:

$$q = T_2\sqrt{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{T_1\,L}{\Omega\,\varepsilon}\left[\frac{R}{L\,f} + \frac{r}{L\,f} + \frac{l}{L}\left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{t}{T_1}\right]} \quad (5)$$

Si le rouleau tendeur est appliqué sur le brin conducteur (le plus tendu), on a:

$$q = T_1\,x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

et on trouve:

$$q = T_1 \sqrt{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{T_1 L}{\Omega\,\varepsilon}\left[\frac{R}{L f} + \frac{r}{L f} + \frac{l}{L}\left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{t}{T_1}\right]} \quad (7)$$

On voit que, dans ce cas, la pression exercée par le rouleau tendeur sur la courroie, doit être plus grande que lorsque ce rouleau est appliqué sur le brin mené; le rapport des deux pressions est $\frac{T_1}{T_2}$.

Soit, par exemple:

$$\frac{L}{a} = 8,\ \frac{L}{b} = 8,\ \frac{T_1}{\Omega} = 25,\ \frac{R}{L} = \frac{1}{10},\ \frac{r}{L} = \frac{1}{10},\ \frac{l}{L} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2},\ \frac{t}{T_1} = \frac{1}{2},\ T_1 = 2\,P,\ f = 0{,}28.\ \varepsilon = 400$$

On a:

d'après la formule (5) $q = 1{\cdot}09\,P$

d'après la formule (7) $q = 2{\cdot}18\,P$

On peut arriver à une formule plus simple, mais moins exacte, en admettant qu'il ne se produit pas de glissement si la courroie, sous l'action du rouleau tendeur, prend une tension uniforme et égale à $1{\cdot}5\,P$, et que de plus, pendant l'action du rouleau sur la courroie, il ne s'exerce sur les poulies ni puissance ni résistance.

En partant de ces hypothèses qui ne sont qu'approximativement vraies, on trouve que l'allongement $\frac{L \times 1{\cdot}5\,P}{\Omega\,\varepsilon}$, dû à la tension uniforme $1{\cdot}5\,P$, doit être égal à l'allongement $\frac{L\,t}{\Omega\,\varepsilon}$ résultant de la tension initiale, augmenté de l'allongement $\frac{1}{2}\,x^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$; on a donc l'équation:

$$\frac{L \times 1{\cdot}5\,P}{\Omega\,\varepsilon} = \frac{L\,t}{\Omega\,\varepsilon} + \frac{1}{2}\,x^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

Si on suppose le rouleau appliqué au brin conducteur, la tension de ce brin étant ordinairement égale à $2\,P$, on a:

$$q = 2\,P\,x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

En éliminant x entre les équations (8) et (9), on trouve:

$$q = 2\,P \sqrt{\frac{2\,(a + b)}{a\,b}\;\frac{L\,(1{\cdot}5\,P - t)}{2\,s}} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Cette formule approximative est en général suffisante pour les applications.

Roues dentées.

Si on prend deux poulies A et B cylindriques ou coniques fig. 1 et 2, pl. XXII, qu'on monte chacune d'elles sur un axe, et qu'on les mette en contact, en les pressant l'une contre l'autre, la rotation imprimée à l'une des poulies entrainera celle de la seconde, si cette dernière n'est pas sollicitée, en sens contraire du mouvement, par une résistance trop considérable. Dans ce mouvement, les vitesses des deux poulies sont égales sur les circonférences de contact et leurs vitesses angulaires ou leurs nombres de tours par minute sont par suite inversement proportionnels à leurs rayons.

Les poulies de friction de ce genre donnent un mouvement très régulier et d'une grande douceur, mais on ne peut songer à les employer pour transmettre un travail considérable, car on serait forcement conduit dans ce cas à des pressions beaucoup trop fortes entre leurs surfaces de contact. Si on munit ces surfaces d'une série de dents engrenant les unes dans les autres, les poulies n'ont plus besoin d'être pressées l'une contre l'autre et, en choisissant pour les dents une forme convenable, on peut arriver à produire un mouvement aussi doux et aussi régulier qu'avec des simples poulies de friction.

Les engrenages sont dits cylindriques ou coniques, suivant que la forme des roues primitives est celle d'un cylindre ou d'un cone. Les premiers servent à relier les arbres parallèles, tandis qu'on utilise les autres pour les arbres dont les directions se rencontrent sous un certain angle.

On peut également établir une liaison par engrenages entre deux arbres dont les axes font un certain angle, mais ne se coupent pas; les engrenages dont on fait usage dans ce cas affectent une forme particulière différente des formes cylindrique et conique.

En établissant la théorie des tracés d'engrenages, nous étudierons un peu plus loin la forme exacte qu'il convient de donner aux dents pour arriver à transmettre le mouvement dans

les mêmes conditions qu'avec des poulies de friction; pour le moment nous nous bornerons à établir les règles qui permettent de calculer toutes les dimensions des roues dentées, en nous appuyant simplement sur les principes élementaires ci-après de la théorie générale.

On donne le nom de cercles primitifs aux cercles de poulies de friction qui produiraient le même effet que les roues d'engrenages au point de vue d'un mouvement déterminé à transmettre. Le rapport de transmission est le nombre de tours que fait le plus petit de ces cercles, pour un tour de l'autre; le pas est la distance entre les milieux de deux dents consécutives, mesurée sur le cercle primitif; enfin les rayons des engrenages sont les rayons des cercles primitifs.

Le rapport de transmission est égal au rapport des cercles primitifs.

Les pas de deux roues qui se commandent doivent être identiques, et les nombres de dents sont, par suite, dans le rapport des rayons des cercles primitifs.

Les nombres de tours de deux roues qui se commandent sont entre eux dans le rapport inverse des rayons ou des nombres de dents.

Les éléments qu'il importe de déterminer pour une roue d'engrenage comprennent: 1°, les dents; 2°, la jante; 3°, les bras; 4°, le moyeu. Pour les dents on emploie la fonte ou le bois; dans le premier cas elles sont directement fondues avec la jante, dans le second au contraire on les rapporte et on les fixe sur cette jante.

Calcul des éléments d'une roue dentée.

Rayon de la roue. Les éléments les plus importants à déterminer, pour une roue d'engrenages, sont la grandeur du rayon du cercle primitif et les dimensions des dents. Le rapport de transmission ne donne que le rapport des rayons des roues et n'indique rien sur leurs grandeurs absolues, qui ne peuvent être déterminées qu'en tenant compte du travail à transmettre. Si on désigne par M le moment de la puissance ou de la résistance sur la plus grande des deux roues, par R le rayon de cette roue, $\frac{M}{R}$ représente l'effort auquel les dents se trouvent soumises. La pression exercée entre deux dents en contact est.

par conséquent, en raison inverse de la grandeur des roues. Comme les dimensions des dents dépendent naturellement de cette pression, il en résulte qu'elles doivent être d'autant plus fortes que les roues sont plus petites.

Les roues de faible diamètre coutent moins cher que les grandes, mais elles ne donnent jamais un mouvement aussi doux que ces dernières et les resistances, dues aux frottements, y sont plus considérables. Pour tous ces motifs, on voit qu'il est à peu près impossible d'établir une règle absolue et rationnelle pour la détermination des rayons des roues dentées et il convient de se borner à une règle empirique.

De l'examen d'un très grand nombre de roues marchant dans des conditions très satisfaisantes, j'ai pu conclure que, dans une transmission par engrenages, le rayon de la plus grande des deux roues devait être, en général, égal à 5 au 6 fois le diamètre de l'arbre fictif calculé pour le travail que doit transmettre la roue. Si donc on désigne par N ce travail en chevaux, par n le nombre de tours par minute de la plus grande roue, par d le diamètre en centimètres d'un arbre capable de transmettre N chevaux, à la vitesse de n tours, on doit poser:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \qquad \frac{R}{d} = 5 \text{ ou } 6, \text{ rarement } 7 \text{ ou } 8 \quad . \quad . \quad (1)$$

Nous donnerons à ce rapport $\frac{R}{d}$ le nom de grandeur relative de la roue. Les roues de la grandeur relative 7 ou 8 ne se rencontrent que très rarement; on ne les emploie que dans le cas où le rapport de transmission a une grande valeur. Dans les conditions ordinaires, pour des rapports de vitesses compris entre 1 et 3, les meilleurs constructeurs ne donnent aux roues que les grandeurs relatives 5 ou 6, suivant qu'il s'agit d'arbres verticaux ou d'arbres horizontaux.

Le rayon R de la plus grande des deux roues une fois déterminé, le rayon r s'en déduit, en divisant R par le rapport de transmission.

Le diamètre d, qui détermine la grandeur relative de la roue, est égal au diamètre réel de l'arbre moteur, lorsque celui-ci doit transmettre intégralement à l'arbre mené tout le travail qu'il reçoit; mais lorsque la roue ne doit transmettre qu'une partie de ce travail, d devient, comme nous l'avons déjà dit

plusieurs fois, une dimension fictive, introduite simplement pour la facilité des calculs.

Dents. Pour déterminer la résistance d'une dent d'engrenage nous la considérerons comme un solide encastré, de forme parallélipipèdique, à l'extrémité duquel agit une force P.

Designons par α (fig. 3, pl. XXII) l'épaisseur d'une dent, par γ sa longueur et par β la largeur de la roue. En vertu des règles établies précédemment pour la flexion, nous aurons:

$$P\gamma = \frac{1}{6}\,\sigma\,\alpha^2\,\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

σ représentant le maximum de tension par unité de surface. De cette équation on tire:

$$\alpha = \sqrt{\frac{6}{\sigma}\,\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}}} \times \sqrt{P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Les rapports $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$ peuvent être pris arbitrairement entre certaines limites. Ordinairement, lorsque les deux roues ont des dents en fonte, on admet $\frac{\gamma}{\alpha} = 1{\cdot}5$, $\frac{\beta}{\alpha} = 6$; si l'une des deux roues a des dents en bois, on prend $\frac{\gamma}{\alpha} = 1$, $\frac{\beta}{\alpha} = 4$.

On obtient d'ailleurs des dimensions conformes à celles des bons constructeurs en prenant pour la fonte $\sigma = 90$.

On a, par conséquent, pour une dent en fonte:

$$\alpha = 0{\cdot}13\,\sqrt{P} \qquad \beta = 6\,\alpha \qquad \gamma = 1{\cdot}5\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Les dents ainsi déterminées ne travaillent qu'au vingtième de leur résistance à la flexion; on n'a donc pas à redouter leur rupture.

Ces règles permettent de déterminer les dimensions des dents quand on connait la force P. Quelquefois, cette force est directement donnée ou du moins se calcule facilement, mais ce n'est pas généralement le cas.

Lorsqu'on a à construire des grues, des treuils, en un mot des appareils élévatoires, on peut en général trouver, à l'aide de calculs simples, l'effort exercé sur les dents d'engrenages. Mais, quand il s'agit d'établir des roues dentées pour transmis-

sions, machines hydrauliques ou à vapeur, on connait le plus souvent le travail N, exprimé en chevaux, qu'une roue doit transmettre et le nombre de tours qu'elle doit faire par minute; on se trouverait conduit à des calculs assez longs si, en partant de ces données et du rayon R de la roue, on voulait déterminer la pression P à la circonférence du cercle primitif.

La méthode des nombres proportionnels appliquée à ce cas, va nous permettre d'établir des règles simples et commodes pour le calcul des dimensions des dents.

La théorie de l'élasticité de torsion nous a donné, pour le diamètre d'un arbre susceptible de résister au moment P R:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi T^1}} \sqrt[3]{P R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Par la combinaison de cettte équation avec la relation (2), on trouve:

$$\frac{d^3 \pi T^1}{16 R} \gamma = \frac{1}{6} \sigma a^2 \beta \text{ ou } \beta = \frac{6 \pi T^1}{16 \sigma} \frac{d^3 \gamma}{R a^2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

En multipliant cette équation par $\frac{\beta}{d^2}$ et en groupant convenablement les termes, on obtient:

$$\frac{\beta}{d} = \sqrt{\frac{6 \pi T^1}{16 \sigma} \frac{\gamma}{a}} \frac{\sqrt{\frac{\beta}{a}}}{\sqrt{\frac{R}{d}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

D'un autre côté, en multipliant la même équation par $\frac{\beta^2}{d^3}$ on a:

$$\frac{d}{\beta} = \sqrt{\frac{16 \sigma a}{6 \pi T^1 \gamma}} \sqrt[3]{\frac{R}{\beta} \frac{a}{\beta}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

En admettant, comme nous l'avons toujours fait jusqu'ici, qu'on calcule le diamètre des arbres par la formule:

$$d = 0{\cdot}39 \sqrt[3]{P R} = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

le coefficient de torsion T^1 est égal à 90; si, en même temps,

dans les équations (7) et (8) on remplace σ et $\frac{\gamma}{\alpha}$ par les valeurs indiquées précédemment (page 218), on trouve:

$$\text{pour les dents en fonte}\left\{\begin{array}{l} \frac{\gamma}{\alpha} = 1{\cdot}5,\ T^1 = 90,\ \sigma = 90 \\ \frac{\beta}{d} = 1{\cdot}38 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\ \frac{d}{R}} \\ \frac{d}{\beta} = 0{\cdot}83 \sqrt[3]{\frac{R}{\beta}\ \frac{\alpha}{\beta}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

La seconde formule détermine le rapport de la largeur de la roue au diamètre de l'arbre, lorsqu'on connait la grandeur relative de cette roue et le raport $\frac{\beta}{\alpha}$ de sa largeur à l'épaisseur des dents.

La troisième formule détermine le rapport du diamètre de l'arbre à la largeur de la roue, quand on connait les rapports $\frac{R}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$.

Pour appliquer ces formules, il nous reste à donner quelques indications sur le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$. Lorsqu'on examine successivement les différents cas qui se présentent dans la pratique, on reconnait facilement que le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ doit varier suivant les circonstances; on peut admettre en général les valeurs suivantes:

1°, $\frac{\beta}{\alpha} = 4$ ou 5 pour les roues de machines, mises en mouvement par des hommes, animées de faibles vitesses et pour lesquelles on n'exige pas un mouvement très doux; $\frac{\beta}{\alpha}$ ayant une petite valeur, les dents sont d'autant plus épaisses et leur nombre d'autant plus petit que la roue est plus étroite.

Les roues de ce genre peuvent donc s'établir plus économiquement, tout en restant suffisamment propres au but proposé.

2°, $\frac{\beta}{\alpha} = 6$ pour les roucs de transmissions ordinaires et les outils dont les vitesses de rotation ne sont pas exagérées. Dans ces conditions, le pas est plus petit, le nombre des dents plus considérable, l'épaisseur de la roue plus forte et il en résulte que le mouvement est plus doux et l'usure moins rapide.

3°, $\frac{\beta}{\alpha} = 7$ ou 8 pour les roues animées de très grandes vitesses, et dont le mouvement doit être aussi parfait que possible. C'est, par exemple, ce qui se présente pour les machines-outils qui ont à remplir des fonctions exigeant beaucoup d'exactitude et de précision.

En tenant compte de ces remarques, il sera facile, dans chaque cas particulier, de choisir une valeur convenable pour $\frac{\beta}{\alpha}$; de même, on pourra fixer préalablement la grandeur relative de la roue, au moyen des indications de la page 217; ces éléments une fois déterminés, les dimensions des dents se calculeront sans peine, à l'aide des équations (9).

Avant d'appliquer ces formules à quelques exemples particuliers, voyons d'abord comment on peut déterminer les autres dimensions relatives de la roue et en premier lieu, le nombre des dents.

Si l'on désigne par Z le nombre des dents d'une roue, par t le pas et R le rayon, on a:

$$z = \frac{2 R \pi}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

équation qui peut encore s'écrire:

$$z = 2 \pi \frac{\alpha}{t} \frac{\beta}{\alpha} \frac{d}{\beta} \frac{R}{d}$$

Ou, en remplaçant $\frac{d}{\beta}$ par la valeur que fournit l'équation (7):

$$z = 2 \pi \frac{\alpha}{t} \sqrt{\frac{16 \sigma}{6 \pi T^1} \frac{\alpha}{\gamma}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{d}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Si les dents des deux roues engrenant ensemble sont en fonte, on doit poser $\frac{t}{\alpha} = 2{\cdot}1$; si au contraire une des roues doit avoir des dents en bois, on doit prendre $\frac{t}{\alpha} = 2{\cdot}67$, en supposant que α, β, γ représentent les dimensions des dents en fonte.

Pour les dents en fonte sur les deux roues, on doit donc poser:

$$\frac{t}{\alpha} = 2{\cdot}1, \quad \sigma = 90, \quad T^1 = 90, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = 1{\cdot}5$$

et, par suite, on a:

$$z = 2{\cdot}25 \left(\frac{R}{d}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Pour les engrenages à dents de bois sur l'une des roues, on doit poser:

$$\frac{t}{\alpha} = 2{\cdot}67,\ \sigma = 90,\ T^{t} = 90,\ \frac{\gamma}{\alpha} = 1{\cdot}5$$

et par conséquent:

$$z = 1{\cdot}79 \left(\frac{R}{d}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Moyeu de roue dentée. Les dimensions du moyeu d'une roue dentée ne peuvent être déterminées que par des règles empiriques; sa longueur dépend à la fois de la largeur de la roue et de son rayon; quant à son épaisseur, elle dépend évidemment du diamètre de l'arbre et du degré de serrage donné à la clavette.

On peut admettre en général les dimensions données par les formules empiriques suivantes:

Longueur du moyeu	$l = \beta + 0{\cdot}06\,R$	(14)
Diamètre de l'alésage ou de la portée de l'arbre, sur laquelle est calée la roue .	$d_1 = \frac{5}{4}\,d$	
Epaisseur du moyeu.	$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,d$	
Largeur de la clavette	$k = 0{\cdot}9\,\delta$	
Epaisseur de la clavette	$k_1 = \frac{1}{2}\,k$	

Bras. Nous admettrons comme règle que le nombre des bras doit être égal au nombre entier qui se rapproche le plus de la grandeur relative $\frac{R}{d}$ de la roue.

On donne à la section des bras la forme en T ou la forme en ┼. La première s'applique de préférence aux roues coniques, la seconde aux roues ordinaires. Une seule des deux nervures de la section a à résister aux efforts qu'i s'exercent tangentiellement à la circonférence de la roue et dans son plan; l'autre nervure est destinée à résister à l'action des forces accidentelles qui viendraient à se produire dans une direction normale au plan de la roue. Si l'on désigne par b l'épaisseur, par h la largeur de la

nervure principale d'un bras, par N_1 le nombre total des bras, on doit poser l'équation:

$$\frac{P\,R}{N_1} = \frac{1}{6}\,\sigma\, b\, h^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

D'un autre côté, on a pour le diamètre d de l'arbre correspondant à l'effort que transmettent les bras.

$$P\,R = \frac{T^1\,\pi}{16}\,d^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

L'élimination de P R entre ces deux équations conduit à:

$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt[3]{\frac{6\,\pi\,T^1}{16\,\sigma}\,\frac{h}{b}}}{\sqrt[3]{N_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$\frac{h}{b}$ peut être supposé constant pour toutes les roues et égal à 5. Le facteur $\frac{6\,\pi\,T^1}{16\,\sigma}$ est naturellement constant, et l'examen d'un certain nombre de bonnes constructions a montré que l'on pouvait prendre $\sqrt[3]{\frac{6\,\pi\,T^1}{16\,\sigma}\,\frac{h}{b}} = 1{\cdot}7$; on a, par suite:

$$\frac{h}{d} = \frac{1{\cdot}7}{\sqrt[3]{N_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

formule qui coïncide avec celle que nous avons donnée pour les bras de poulies.

Nous avons admis jusqu'ici que tout le travail de l'arbre moteur était transmis à l'arbre mené. Ce n'est pas ce qui en réalité a toujours lieu et il arrive quelquefois que non seulement le travail transmis n'est qu'une fraction du travail reçu par l'arbre moteur, mais encore que cette fraction doit être répartie entre plusieurs arbres différents.

Roues normales et anormales. Nous dirons que des roues d'engrenages sont normales ou anormales suivant qu'elles sont destinées à transmettre la totalité ou une fraction seulement du travail de l'arbre moteur.

Les règles précédentes s'appliquent entièrement aux roues anormales, à la seule condition d'introduire dans les calculs des

diamètres fictifs, déterminés comme nous l'avons indiqué précédemment.

Si, par exemple, une roue dentée transmet un travail de 20 chevaux avec une vitesse de 160 tours, on devra, dans le calcul des bras, prendre comme diamètre d'arbre $16\sqrt[3]{\frac{20}{160}}$ ou 8 centimètres.

Si ces 20 chevaux devaient se transmettre par l'intermédiaire de deux paires de roues, produisant des effets identiques, on devrait, dans le calcul des dents, prendre un diamètre fictif égal à $16\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2}\,20}{160}}$ ou 6cm., 4. Les exemples que nous allons traiter montreront d'ailleurs la marche à suivre dans les différents cas.

Premier problème. Calculer deux roues d'engrenage normales A et B (fig. 4, pl. XXII) avec les données suivantes:

Force en chevaux dans l'arbre moteur a, dans les deux roues A et B, ainsi que dans l'arbre mené b	20
Nombre de tours de l'arbre moteur par minute	80
Nombre de tours de l'arbre mené	160
Diamètre réel de l'arbre moteur $16\sqrt[3]{\frac{20}{80}}$ . . .	10 centim.
Diamètre de l'arbre mené $16\sqrt[3]{\frac{20}{160}}$	8 »
Grandeur relative de la roue motrice	6 »
Rayon de cette roue 6×10	60 »
Rayon de la roue menée	30 »
Valeur de $\frac{\beta}{a}$ (pour roues de transmission) . . . $\frac{\beta}{a} = 6$	»
Largeur des dents (pour $\frac{R}{d} = 6$, $\frac{\beta}{a} = 6$) : $\beta = 1{\cdot}33 \times 10$	$= 13{\cdot}3$ »

Si les dents des deux roues doivent être en fonte, on trouve, d'après les formules que nous avons indiquées précédemment:

Nombre des dents de la roue motrice	82
Nombre des dents de la roue menée	41
Nombre des bras de la roue motrice	6
Grandeur relative de la roue menée	4

Dimensions transversales des bras	R. motrice $0{\cdot}94 \times 10$ . . .	9.4
	R. menée $1{\cdot}08 \times 8$	8·6
Longueur du moyeu . .	R. motrice $13{\cdot}3 + 0{\cdot}06 \times 60$	= 16·9
	R. menée $13{\cdot}3 + 0{\cdot}06 \times 30$	= 15·1
Diamètre de la portée .	R. motrice $\frac{5}{4}\, 10$	= 12·5
	R. menée $\frac{5}{4}\, 8$	= 10
Epaisseur du moyeu . .	R. motrice $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\, 10$ . .	= 3·83
	R. menée $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\, 8$ . .	= 3·16

Second problème. Calculer les dimensions d'un engrenage, en supposant que la moitié du travail reçu par l'arbre moteur a (fig. 5, pl. XXII), soit transmise à l'arbre mené b.

Le diamètre de l'arbre moteur est de 14 centimètres et la vitesse de l'arbre mené est le triple de celle de l'autre.

Dans ce cas, en désignant par a_1 un arbre fictif dont le diamètre correspondrait à la moitié du travail, les diamètres sont les suivants:

pour a	a_1	b
14	$\frac{14}{\sqrt[3]{2}} = 11{\cdot}1$	$14\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 6{\cdot}0.$

En partant de l'arbre a_1, on peut déterminer les dimensions des bras et des dents des roues; on trouve ainsi:

Rayon de la roue $A = 6 \times 11{\cdot}1$ . . . . = 66·6
Rayon de la roue B . . . . = 22·2
Largeur des dents (pour $\frac{R}{d} = 6$, $\frac{\beta}{\alpha} = 6$) $= 1{\cdot}33 \times 11{\cdot}1$. = 14·8
Grandeur relative de la roue B, $\frac{22{\cdot}2}{6}$ approximativement . = 4

Nombre des bras . . .	de la roue A	= 6
	de la roue B	= 4
Dimensions h des bras .	pour A, $11{\cdot}1 \times 0{\cdot}94$ . . .	= 10·4
	pour B, $6 \times 1{\cdot}08$	= 6·5

La roue B est normale par rapport à l'arbre b; la roue A, au contraire, s'écarte d'une roue normale, car son moyeu devant se claveter sur la portée de l'arbre de 14c est relativement très fort; le diamètre de l'alésage ou de la portée est $\frac{5}{4} \times 14 = 17^{c}{\cdot}5$.

Troisième problème. (Fig. 6 et 7, pl. XXII.) Une partie du travail de l'arbre moteur a doit être transmise à deux autres arbres b et c.

On admet que l'arbre a a été exactement déterminé à l'avance et que son diamètre d est de 20 centimètres; mais on ne connait ni la force en chevaux N qu'il reçoit, ni le nombre de tours n quil fait par minute.

L'arbre a doit transmettre à l'arbre b un travail égal à $\frac{1}{4}$ N et le nombre de tours de b doit être $\frac{3}{2}$ n; de même, l'arbre a doit transmettre à l'arbre c un travail égal à $\frac{1}{6}$ N, la vitesse de rotation de l'arbre c étant également $\frac{3}{2}$ n.

Calculons d'abord les diamètres réels de b et de c.

On a comme donnée $d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ . . . . $= 20$

il en résulte:

Diamètre de $b = 16 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{4}N}{\frac{3}{2}n}} = \frac{d}{\sqrt[3]{6}}$ . . . . $= 11$

Diamètre de $c = 16 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{6}N}{\frac{3}{2}n}} = \frac{d}{\sqrt[3]{9}}$ . . . . $= 9{\cdot}5$

Les bras de la roue A doivent transmettre, à la vitesse de n tours, un travail égal à $\frac{1}{4}$ N + $\frac{1}{6}$ N = $\frac{5}{12}$ N.

Le diamètre fictif qui permettra de calculer ces bras sera donc:

$$16 \sqrt[3]{\frac{\frac{5}{12}N}{n}} = d \sqrt[3]{\frac{5}{12}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad = 14{\cdot}8$$

En admettant que nous donnions 6 bras à la roue A, nous aurons, pour leurs dimensions, $h = 14{\cdot}8 \times 0{\cdot}94$ . . . . . $= 14^c$

Les dents de A devant transmettre à la roue B $\frac{1}{4}$ N, à la roue c $\frac{1}{4}$ N, on doit leur donner les dimensions qui correspondent

au plus grand effort; l'arbre fictif qui permettra de les calculer sera, par conséquent:

$$16\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{4}N}{n}} = \frac{d}{\sqrt[3]{4}} \quad \ldots\ldots \quad = 12{\cdot}6$$

En admettant 6 pour grandeur relative de la roue A, on a:
Rayon de A $= 12{\cdot}6 \times 6$ . . . . $= 75{\cdot}6$
Rayons de B et C $= 75{\cdot}6 \times \frac{2}{3}$ . . . . $= 50{\cdot}4$
Largeur de A, B, C $= 1{\cdot}33 \times 12{\cdot}6$ . . . . $= 16{\cdot}7$

De ces trois roues une seule, la roue B, est normale; ainsi la roue A a des bras très forts et des dents faibles, l'inverse a lieu pour la roue C. Nous devons toutefois ajouter que dans la pratique, pour éviter les frais de modèles, il serait plus avantageux de faire les deux roues B et C identiques.

Quatrième exemple. Une machine à vapeur et une turbine doivent mener ensemble une usine (fig. 8, pl. XXII).

L'arbre a reçoit son mouvement de la machine à vapeur qui est de 40 chevaux et il fait 30 tours par minute; l'arbre b, qui fait 40 tours, est commandé par la turbine dont la force est de 20 chevaux; enfin, l'arbre c doit recevoir et transmettre, à la vitesse de 80 tours, la totalité de la force motrice ou 60 chevaux.

Les diamètres des arbres réels ont pour valeurs:

$$\overset{a}{16\sqrt[3]{\frac{40}{30}}} = 17{\cdot}6 \qquad \overset{b}{16\sqrt[3]{\frac{20}{40}}} = 12{\cdot}7 \qquad \overset{c}{16\sqrt[3]{\frac{60}{80}}} = 14{\cdot}7.$$

La roue A est normale, car l'arbre, les bras et les dents doivent être calculés pour le même travail à transmettre; nous prendrons donc:
Rayon de A $= 6 \times 17{\cdot}6$ . . . . $= 105{\cdot}6$
Largeur des dents $\beta = 1{\cdot}33 \times 17{\cdot}6$ . . . . $= 23{\cdot}4$
Nombre des bras . . . . $= 6$
Largeur des bras $17{\cdot}6 \times 0{\cdot}94$ . . . . $= 16{\cdot}5$

Quant à la roue B, elle ne peut plus être normale. D'abord il est évident que les vitesses à la circonférence doivent être les mêmes pour A, B et C; on doit donc avoir:
Rayon de B $= 105{\cdot}6 \times \frac{30}{40}$ . . . . $= 79{\cdot}2$

La grandeur relative de B est donc $\frac{79{\cdot}2}{14{\cdot}7}$ ou approximativement . . . . = 5

La division des dents et leur épaisseur devant être les mêmes pour deux roues qui engrènent ensemble, il en résulte que les trois roues A. B et C doivent avoir la même denture et que, par suite, les dents de B doivent avoir des dimensions plus fortes que celles qu'exigerait le travail à transmettre. Les bras des roues B et C peuvent être calculés en partant des diamètres des arbres correspondants b et c. Le rayon de la roue intermédiaire C est déterminé par le rapport des vitesses, il doit être égal à $\frac{30}{80}$ du rayon de A ou à $\frac{40}{80}$ de celui de B, ce qui donne $39^{c}.6$.

On doit en principe éviter autant que possible les roues anormales, car leur exécution entraine des modèles spéciaux et par suite des dépenses plus élevées. Mais dans les transmissions compliquées, ou lorsqu'on fait usage de machines motrices combinées, on est forcément conduit à adopter une solution de ce genre.

Nous devons ajouter d'ailleurs qu'avec le moulage en sable, les frais de fabrication de roues anormales ne sont pas plus considérables que ceux des autres roues.

Dentures en fonte et en bois. Avantages et inconvénients.

Pour mettre à même de décider si, dans un cas donné, on a intérêt à employer des engrenages à dents de bois ou à dents de fonte, nous devons examiner quels sont les avantages et les inconvénients que présentent ces deux espèces de dentures.

Dents en fonte sur les deux roues.

Avantages. Les dents font corps avec la roue elle même; elles peuvent donc se briser, mais non prendre du jeu dans la jante.

Les dents en fonte ne se déforment que très lentement sous l'action des frottements, elles peuvent donc fournir pendant une période relativement très grande un mouvement doux et régulier.

Lorsque le changement de vitesse d'un arbre à l'autre est très considérable et que la plus petite roue (ou le pignon) tourne très vite, ses dents viennent très souvent en prise, dans un inter-

valle de temps déterminé, et elles sont par suite exposées à une usure rapide; les dents métalliques doivent donc, à peu près forcément, être employées pour les pignons de petits rayons.

Pour les machines dont le mouvement n'est pas très rapide et n'exige pas une très grande précision (grues, treuils), on peut employer, pour l'exécution des roues, des modèles ayant déjà servi, lors même qu'ils seraient légèrement déformés; dans ce cas, les roues à denture métallique sont les plus économiques.

Les dents en fonte peuvent être admises, même pour des roues excessivement petites, comme on en rencontre souvent dans les machines-outils.

Les dents peuvent être taillées, et dans ce cas, elles peuvent fournir pendant une longue période un mouvement d'une grande précision; toutefois, comme la taille des dents entraine une assez grande dépense, on ne l'exécute généralement que pour les appareils dont le mouvement exige une très grande régularité.

Inconvénients. Lorsqu'une dent en fonte vient à se briser, on est conduit le plus souvent à remplacer la roue entière, qui n'a plus alors qu'une faible valeur, celle de la vieille fonte. Lorsqu'une roue à dents métalliques doit transmettre un mouvement d'une très grande précision, on ne peut guère recourir à des modèles déjà existants, car ils sont presque toujours déformés (lorsqu'ils sont en bois); il faut alors faire de nouveaux modèles, ce qui entraine une assez grande dépense. Les engrenages à dents métalliques font toujours beaucoup de bruit et il peut en résulter une gêne sérieuse pour certains ateliers. Enfin, lorsque des dents métalliques doivent transmettre avec précision un mouvement très rapide, il est indispensable de retoucher les dents au burin et à la lime, ce qui constitue une opération très couteuse, surtout pour les roues d'un grand diamètre.

Roue à dents de bois engrenant avec un pignon à dents de fonte.

Avantages. Le corps d'une roue en fonte, portant une denture en bois, peut avoir une durée pour ainsi dire indéfinie; une dent brisée peut se remplacer facilement. Lorsque les dents sont arrivées à un certain degré d'usure, on n'a qu'à les changer, sans toucher le moins du monde au corps de la roue.

Les engrenages de ce genre peuvent être fondus en se servant de modèles anciens et même légèrement déformés; un certain degré d'ovalisation de la jante peut être racheté par l'ajustage des dents; il suffit pour cela de placer la pièce sur le tour, lorsque ces dents ont été chassées dans les trous de la jante.

Avec des garnitures en bois on peut employer le même modèle pour des rapports de vitesses très différents, attendu que, si la forme des dents doit changer suivant les vitesses, la forme et les dimensions de la partie métallique peuvent rester invariables. Le bruit que fait une garniture en fonte engrenant avec une garniture en bois est bien inférieur à celui de deux roues métalliques.

Inconvénients. Avec les dents en bois, le temps pendant lequel le mouvement se transmet avec précision est moindre qu'avec les engrenages entièrement en fonte. Il est à peu près impossible d'arriver à fixer convenablement les dents en bois dans les creux de la jante; au bout d'un temps plus ou moins long, elles prennent du jeu et on doit les recaler.

Conclusions. De la comparaison des avantages et des inconvénients que nous venons d'énumérer, on peut conclure qu'il faut recourir aux dents métalliques:

1°, pour les petites roues en fonte ou en bronze, comme celles des horloges ou des machines outils très délicates; 2°, pour les petites roues en fonte des métiers de filatures ou des machines analogues; 3°, pour les machines outils, telles que les tours, les machines à raboter, etc.; 4°, pour les engrenages de grues, de treuils; 5°, pour les pignons qui doivent engrener avec de grandes roues garnies de dents en bois; 6°, pour les engrenages qui doivent conserver longtemps un mouvement régulier et d'une grande précision.

On doit, au contraire, adopter les dents en bois: 1°, pour les grandes roues engrenant avec de petits pignons; 2°, pour les transmissions installées dans des ateliers où l'on tient à éviter le bruit.

Construction des roues d'engrenages. Le mode de construction des roues dentées varie suivant leur grandeur et la matière dont elles doivent être formées.

Les petites roues pour horloges ou machines délicates se font généralement en cuivre ou en bronze; les roues de montres et de pendules se font en tôle de cuivre. Les roues dans lesquelles la largeur des dents est comprise entre 3 et 15 millimètres sont fondues et taillées ensuite. Lorsqu'on n'a à établir qu'une roue unique, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est de tailler les dents au moyen d'un outil présentant la forme du creux entre les dents. Lorsqu'au contraire, comme dans les fabriques d'horlogerie, on a à établir un grand nombre de roues semblables, on se sert, pour tailler des dents, d'une fraise à laquelle on donne un mouvement rapide de rotation.

On superpose un grand nombre de roues (en tôle) et on les découpe avec la fraise, comme s'il s'agissait d'une roue unique. Le travail s'effectue de cette manière avec une très grande rapidité, car, pour le bronze et le cuivre, on peut donner à la fraise une vitesse de rotation considérable, sans avoir à redouter un échauffement de nature à compromettre sa trempe.

Les petites roues en fonte des métiers de filatures se fondent avec des modèles en bronze, préparés comme nous venons de l'indiquer.

Lorsque les roues ont de plus grandes dimensions, on les fait toujours en fonte, et dans ce cas, on a recours à des modèles ou au simple moulage en sable.

Ces deux systèmes ont à la fois des avantages et des inconvénients. Lorsqu'on possède déjà un modèle convenable pour la roue qu'on veut établir et qui n'a pas souffert, la fonte sur modèle est le procédé de fabrication le plus économique; mais il est bien rare que les modèles qui ont déjà servi ne soient pas quelque peu déformés et dès-lors il est à craindre que les roues obtenues par le moulage sur modèles ne soient pas toujours parfaitement régulières; pour éviter cette chance d'erreur, il faudrait donc établir un modèle neuf, mais on ne peut guère le faire avec avantage que lorsqu'on peut espérer l'utiliser ensuite pour d'autres roues exigeant moins de régularité. Si donc il s'agit de construire une roue dentée présentant une grande précision, ou une roue qui a peu de chances de se trouver reproduite plus tard, comme, par exemple, c'est le cas pour un roue anormale, il est préférable de ne pas établir de modèle et de recourir au moulage au sable; bien que la construction du chassis de moulage lui-même ne soit pas très couteuse, l'ensemble des mains-

d'œuvre, qu'exige le moulage au sable, représente cependant une dépense assez considérable.

Ce n'est pas ici le lieu d'examiner en détail les questions de travail qui se présentent dans la confection des modèles de roues et nous nous bornerons simplement à indiquer la marche à suivre pour obtenir des roues offrant une très grande exactitude. Lorsqu'on veut établir un modèle pour une roue entièrement métallique, on commence par former le corps de ce modèle au moyen d'un certain nombre de morceaux de bois qu'on réunit ensemble en les collant et en les clouant; sur le corps de la roue ainsi préparé on assemble à queue d'hironde les petits blocs destinés à former les dents et qui sont composés de bois tendre et fibreux; tous ces blocs se touchent de manière à former, sur le contour de la roue, une masse continue; le modèle est alors placé sur un tour, afin de dresser avec le plus grand soin la surface extérieure du bois; on tourne également le moyeu et on trace le cercle du trou à percer pour ce moyeu, la circonférence qui, sur les deux faces, doit séparer les dents du corps de la roue et enfin le cercle primitif également sur les deux faces.

Cela fait, on enlève la pièce du tour et, au moyen d'un compas à deux pointes, on divise le cercle primitif d'après le nombre de dents que doit avoir la roue ; on trace ensuite chaque dent au moyen d'un calibre en tôle de laiton; on découpe à l'aide d'une scie les parties à enlever pour former les creux et au moyen de deux limes, l'une grossière, l'autre plus fine, on achève de donner aux dents leur forme définitive.

Lorsqu'il s'agit d'établir une roue avec un corps en fonte et des dents en bois, on commence d'abord par établir un modèle pour le corps de la roue, qu'on porte à la fonte. Puis, dans les creux ménagés sur le contour de la pièce fondue, on encastre des morceaux de bois, destinés à former les dents et d'une épaisseur telle qu'ils déterminent une couronne continue. On alèse alors le moyeu de la roue au diamètre de la portée de l'arbre, sur laquelle doit se faire le calage; cette opération terminée, la roue est placée et calée définitivement sur son arbre, qu'on monte entre les pointes d'un tour; la couronne en bois est tournée à la circonférence et sur ses deux faces, et on trace le cercle primitif. Ce cercle est alors divisé, comme précédemment, au moyen d'un compas, d'après le nombre des dents que doit avoir l'engrenage; ces dents, tracées au moyen d'un calibre en tôle de laiton, sont ensuite découpées à la scie et achevées à la lime.

Par ces procédés on obtient une roue parfaitement cylindrique et rigoureusement concentrique avec l'axe de l'arbre de rotation.

Vis sans fin.

Pour déterminer les différentes dimensions d'une vis sans fin, il importe de remarquer que les frottements, entre les filets de la vis et les dents de la roue qu'elle commande, font perdre une partie notable du travail reçu par l'arbre moteur.

Désignons (fig. 9, pl. XXII) par d le diamètre de l'arbre de la vis, r le rayon de cette vis A, n le nombre de tours qu'elle fait par minute, N le travail en chevaux transmis à l'arbre moteur a, d_1 le diamètre de l'arbre de la roue dentée B, R son rayon, α et β les dimensions de ses dents, n_1 le nombre de tours qu'elle fait par minute, N_1 le travail reçu par l'arbre de la roue, lorsque l'arbre de la vis développe le travail N; Z le nombre des dents de la roue.

Comme, pour un tour complet de la vis, la roue dentée tourne d'une quantité égal au pas, il en résulte que le nombre Z des dents de la roue exprime le nombre de révolutions que doit faire la vis pour que la roue dentée fasse un tour. On a donc:

$$\frac{n}{n_1} = Z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pour déterminer les diamètres des arbres, on a d'ailleurs les relations:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \qquad d_1 = 16 \sqrt[3]{\frac{N_1}{n_1}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

D'où on déduit:

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt[3]{\frac{N_1}{N} \frac{n}{n_1}}$$

ou, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt[3]{\frac{N_1}{N}} \sqrt[3]{Z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Le rapport $\frac{N_1}{N}$ dépend du degré de perfection apporté à

l'exécution des pièces; mais, même dans les cas les plus favorables, sa valeur ne dépasse pas $\frac{1}{2}$ et, en général, elle est de $\frac{1}{3}$, comme nous le verrons plus loin, dans la théorie du frottement.

Les dents de la roue B doivent se déterminer comme on le ferait pour une roue dentée ordinaire, montée sur un arbre de diamètre d_1. Nous aurons donc, d'après la relation (12), page 222:

$$z = 2{\cdot}25 \left(\frac{R}{d_1}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Si on remplace d_1 par sa valeur tirée de la relation (3), on trouve pour R la formule:

$$\frac{R}{d} = \frac{\left(\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(2{\cdot}25\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}} \, Z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

le rayon de la roue se trouve donc ainsi déterminé en fonction de d et de Z. De plus, l'équation (9), page 220, donne pour une roue normale:

$$\frac{\beta}{d_1} = 1{\cdot}33 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \frac{d_1}{R}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

D'où on tire:

$$\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}33 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{d_1}{d} \sqrt{\frac{d_1}{R}} = 1{\cdot}33 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{d}{R}} \left(\frac{d_1}{d}\right)^{\frac{3}{2}}$$

En remplaçant $\frac{d_1}{d}$ et $\frac{d}{R}$ par leurs valeurs fournies par les équations (3) et (4), on trouve:

$$\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}33 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\left(2{\cdot}25\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{Z^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}} \left(Z\right)^{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}}$$

Ou

$$\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}33 \left(2{\cdot}25\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

relation qui détermine la largeur des dents.

Les rapports $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{r}{d}$ restent indéterminés et peuvent être pris arbitrairement entre certaines limites.

Si nous prenons $\frac{\beta}{\alpha} = 4$, $\frac{r}{d} = 2$, nous trouverons, d'après les formules (3), (5), (7):

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Pour } \frac{N_1}{N} = & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{d_1}{d} = & 0{\cdot}78 \sqrt[3]{Z} & 0{\cdot}70 \sqrt[3]{Z} & 0{\cdot}63 \sqrt[3]{Z} \\ \frac{R}{d} = & 0.28\ Z & 0{\cdot}26\ Z & 0{\cdot}23\ Z \\ \frac{\beta}{d} = & 3{\cdot}43 & 3.00 & 2{\cdot}77 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

Résultats qui permettent de calculer facilement, dans chaque cas, les dimensions qu'il convient de donner aux différents éléments de la vis.

Leviers coudés.

Leviers coudés en fer forgé. Soit A B C un levier coudé (fig. 10, pl. XXII).

Supposons que chacune des deux branches soit terminée par un tourillon et que le levier lui-même soit fixé sur un axe autour duquel il puisse tourner.

C'est pour faciliter le calcul que nous admettons cette disposition particulière du levier, à laquelle on peut du reste aisément ramener toutes les autres. Les quantités à déterminer sont les diamètres des trois tourillons A, B, C et les dimensions des sections des bras au point de rotation C.

Désignons par:

p et q les longueurs des bras A C et B C,

δ_p et δ_q les diamètres des tourillons A et B,

d le diamètre du tourillon C autour duquel tourne le levier,

P et Q les efforts exercés en A et B, perpendiculairement aux deux bras,

α = B C A, l'angle que forment les directions de ces deux bras.

Pour un levier à construire, nous prendrons comme données P, p, q et α.

Dans l'état d'équilibre, on a $P \times p = Q \times q$; par suite $Q = \frac{P \times p}{q}$.

En partant des règles établies, page 177, pour les tourillons en fer forgé, nous trouvons:

$$\delta_p = 0{\cdot}12 \sqrt{P}$$

$$\delta_q = 0{\cdot}12 \sqrt{Q} = 0{\cdot}12 \sqrt{P \frac{p}{q}} = 0{\cdot}12 \sqrt{P} \sqrt{\frac{p}{q}} = \delta_p \sqrt{\frac{p}{q}} \quad (1)$$

Pour déterminer le diamètre d du tourillon de rotation, nous devons d'abord calculer la pression R, à laquelle il est soumis. Pour cela, prolongeons les directions des forces P et Q jusqu'à leur rencontre en D, prenons D E = P, D G = Q et construisons le parallélogramme D G F E, la diagonale D F représentra, en grandeur et en direction, la pression R, et comme nous avons supposé que les forces P et Q se faisaient équilibre, la direction D F prolongée doit venir passer par le point C. La figure donne alors:

$$D F = R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2 P Q \cos \alpha}$$

Ou, en remplaçant Q par sa valeur $\frac{P \times p}{q}$

$$R = P \sqrt{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2 \left(\frac{p}{q}\right) \cos \alpha}$$

Comme maintenant $d = 0{\cdot}12 \sqrt{R}$, et $\delta_p = 0{\cdot}12 \sqrt{P}$, on tire de là:

$$d = \delta_p \sqrt[4]{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2 \left(\frac{p}{q}\right) \cos \alpha} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Le tableau suivant contient les valeurs calculées du radical pour différentes valeurs de $\frac{p}{q}$ et de α.

Rapports $\frac{p}{q}$	Valeur de $\sqrt[4]{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2 \left(\frac{p}{q}\right) \cos \alpha}$ pour						
	$\alpha = 180^0$	$\alpha = 150^0$	$\alpha = 120^0$	$\alpha = 90^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 0^0$
1	1·4	1·4	1·3	1 1	1·0	0·7	0·0
2	1·7	1·7	1·6	1·5	1 3	1·1	1·0
3	2 0	2 0	1·9	1·8	1·6	1·5	1·4
4	2·2	2·2	2·1	2·0	1·9	1·8	1·7
5	2·4	2·4	2 4	2·3	2·1	2·0	2·0
6	2·6	2·6	2·6	2·5	2·4	2·3	2·2
7	2 8	2·8	2·8	2·7	2·6	2·5	2 4
8	3·0	3·0	3 0	2 8	2·7	2·7	2 6
9	3·2	3·1	3·1	3 0	2·9	2·8	2·8
10	3·3	3·3	3·3	3·2	3·1	3 0	3·0

Pour calculer la section d'un bras, désignons par h et b les deux dimensions de cette section, supposée rectangulaire, c la longueur du tourillon à l'extrémité du bras p, σ le maximum de tension à admettre pour le tourillon δ_p comme pour les bras au point C; nous pourrons poser, pour le tourillon, l'équation:

$$P \frac{c}{2} = \sigma \frac{\pi}{32} (\delta_p)^3$$

et, pour le bras p.

$$P\, p = \frac{1}{6} \sigma\, b\, h^2$$

En éliminant σ entre ces deux équations, nous obtenons un résultat dont on déduit facilement la relation suivante:

$$\frac{h}{\delta_p} = \sqrt[3]{\frac{6\,\pi}{16} \left(\frac{h}{b}\right) \left(\frac{p}{\delta_p}\right) \left(\frac{\delta_p}{c}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Comme cette expression est assez compliquée, on peut se dispenser de la calculer, en ayant recours à la table suivante, dans laquelle le rapport $\frac{\delta_p}{c}$ a été supposé constant et pris égal à $\frac{2}{3}$.

Rapport $\frac{p}{\delta_p}$	Valeur de $\frac{b}{\delta_p}$			
	$\frac{h}{b} = 2$	$\frac{b}{b} = 3$	$\frac{b}{b} = 4$	$\frac{h}{b} = 5$
5	2·0	2·3	2·5	2·7
10	2·5	2·9	3·2	3·4
20	3·1	3·6	4·0	4·3
30	3·6	4·1	4·6	4·9
40	4·0	4·6	5·0	5·4
50	4·3	4·9	5·4	5·8
60	4·6	5·2	5·7	6·2
70	4·8	5·5	6·0	6·5
80	5·0	5·7	6·3	6·8
90	5·2	6·0	6·6	7·1
100	5·4	6·2	6·8	7·3

Supposons, par exemple, que, pour un levier coudé, on ait $p = 100$, $\delta_p = 5$, $\frac{h}{b} = 2$; la table précédente donne $\frac{h}{\delta_p} = 3{\cdot}1$; par suite $h = 3{\cdot}1 \times 5 = 15{\cdot}5$ et $b = \frac{15{\cdot}5}{2} = 7{\cdot}75$.

Dans le cas où les extrémités des bras ne doivent pas se terminer par des tourillons, on effectue les calculs comme s'ils devaient en avoir et on se borne à ne pas les reproduire dans le tracé. Lorsque les bras doivent porter un double tourillon, le calcul se fait comme pour un tourillon simple; seulement dans le tracé le diamètre du tourillon double doit être pris égal à celui du tourillon simple, multiplié par $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $0{\cdot}7$.

Si le levier est muni d'un axe de rotation, terminé à ses extrémités par deux tourillons également éloignés du corps de ce levier, on fait le calcul comme s'il n'y avait qu'un seul tourillon et on obtient le diamètre des tourillons de l'axe de rotation, en multipliant par $0{\cdot}7$ le diamètre d fourni par la table.

Supposons, par exemple, $p = 150$, $q = 50$, $\alpha = 120^0$, $P = 1000$ kilogr., on trouve $\delta_p = 0{\cdot}12\sqrt{1000} = 3{\cdot}8$, $\delta_q = 3{\cdot}8\sqrt{\frac{150}{50}} = 6{\cdot}57$; l'une des tables précédentes donne $d = 1{\cdot}9$, $\delta_p = 7{\cdot}22$. Pour le calcul de la section du bras, on a $\frac{p}{\delta_p} = \frac{150}{3{\cdot}8} = 40$ et en posant $\frac{h}{b} = 3$, l'autre table donne $\frac{h}{\delta_p} = 4{\cdot}5$; par suite $h = 4{\cdot}5 \times 3{\cdot}8 = 17{\cdot}1$ et $b = \frac{17{\cdot}1}{3} = 5{\cdot}7$.

Manivelles, Leviers à manivelles, et Axes de manivelles.

Dans les leviers à manivelle, l'axe de rotation est toujours soumis à des efforts de torsion; c'est ce qui, au point de vue de la construction, les distingue des leviers ordinaires, dans lesquels ces axes n'ont à résister qu'à des efforts de flexion.

Au premier abord, il peut paraître à peu près inutile d'établir des règles spéciales pour déterminer les différentes dimensions d'une manivelle, puisque nous avons précédemment donné des formules relatives au calcul des tourillons, des arbres exposés à la torsion et des bras de levier, c'est-à-dire des trois éléments dont se compose précisément une manivelle; mais il importe de remarquer que ces organes se trouvent en général dans des con-

ditions particulières pour lesquelles les formules que nous avons établies n'offriraient pas une sécurité suffisante; le plus souvent en effet, une manivelle se trouve soumise à l'action de grandes masses en mouvement, comme celles du volant et du balancier dans les machines à vapeur, et dans ce cas, la rupture de la manivelle pourrait avoir les conséquences les plus graves et les plus funestes. Si, par exemple, pour une machine à vapeur à balancier, le tourillon de la manivelle venait à se rompre, le piston n'étant plus limité dans sa course, serait violemment projeté, sous l'action de la vapeur, contre le couvercle ou le fond du cylindre; ce choc se reproduirait d'ailleurs un certain nombre de fois, car en vertu de sa force vive l'arbre du volant continuerait à tourner, après la rupture de la manivelle, et à faire marcher, par suite, les organes de distribution de vapeur, jusqu'à ce que cette force vive se trouvât détruite par le travail des résistances extérieures. Ce mouvement de va et vient du piston se transmettrait au balancier et à la bielle; l'extrémité de cette dernière pièce n'étant plus maintenue par la manivelle, il pourrait arriver que, dans son mouvement oscillatoire, elle vînt s'arcbouter sur le massif de fondation et se briser en produisant en même temps la rupture ou du moins une détérioration fâcheuse du balancier. Cette simple remarque prouve suffisamment la nécessité de règles spéciales pour la construction des manivelles.

Nous allons commencer par établir la relation qui doit exister entre le diamètre du tourillon d'une manivelle et celui de l'arbre de cette manivelle. Désignons par:

d, le diamètre du tourillon de la manivelle,

D, le diamètre de l'arbre de cette manivelle,

A, la longueur de cette manivelle, entre les centres du tourillon et de l'arbre.

C, la longueur du tourillon,

T et S les tensions à la surface de l'arbre et à l'origine du tourillon,

P, la pression exercée sur le tourillon.

En vertu des théories établies sur la résistance à la torsion et à la flexion, nous avons les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} P\,A &= T\,\frac{\pi}{16}\,D^3 \\ P\,\frac{c}{2} &= S\,\frac{\pi}{32}\,d^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

D'où on tire facilement, par l'élimination de P:

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{S}{T}\frac{d}{c}}\sqrt[3]{\frac{A}{d}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$\frac{d}{D} = \sqrt[2]{\frac{T}{S}\frac{c}{d}}\sqrt[2]{\frac{D}{A}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

La première de ces équations détermine le diamètre de l'arbre quand on connait la longueur A du bras de manivelle et le diamètre d du tourillon. La seconde donne au contraire le diamètre du tourillon, quand on connait le diamètre D de l'arbre et la longueur c du bras de manivelle.

La comparaison des dimensions fournies par ces expressions avec celles de manivelles d'une bonne construction, montre qu'il y a un accord très satisfaisant entre les résultats du calcul et ceux qu'indique l'expérience, à la condition de poser:

$$\sqrt[3]{\frac{S}{T}\frac{d}{c}} = \left\{ \begin{array}{l} 0{\cdot}9, \text{ lorsque le tourillon et l'arbre sont en fer forgé,} \\ 1{\cdot}1, \text{ lorsque le tourillon est en fer forgé et l'arbre} \\ \quad \text{en fonte.} \end{array} \right\} \quad . \; . \quad (4)$$

En prenant $\frac{d}{c} = \frac{2}{3}$, il vient:

$$\frac{S}{T} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{d}(0{\cdot}9)^3 = 1{\cdot}09 \\ \\ \frac{c}{d}(1{\cdot}1)^3 = 2{\cdot}0 \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Si donc on admet, comme l'indique le tableau de la page 97, que, pour le fer forgé, les coefficients de résistance à la rupture par flexion et par torsion soient égaux et que le coefficient de rupture par flexion pour le fer forgé soit sensiblement le double du coefficient de rupture par torsion pour la fonte, on peut tirer de ce qui précède cette conséquence que, dans les manivelles, telles qu'on les établit en réalité, les tourillons se trouvent, au point de vue de la résistance, précisément dans les mêmes conditions que les arbres; c'est ce que nous avons précédemment trouvé pour les dents et les arbres des roues d'engrenages.

En tenant compte des relations (4), les expressions (2) et (3) deviennent:

	Tourillons:	Arbres:
$\frac{D}{d} = 0{\cdot}9 \sqrt[3]{\frac{A}{d}}$	fer forgé	fer forgé
$\frac{D}{d} = 1{\cdot}1 \sqrt[3]{\frac{A}{d}}$	fer forgé	fonte
$\frac{d}{D} = 1{\cdot}171 \sqrt[2]{\frac{D}{A}}$	fer forgé	fer forgé
$\frac{d}{D} = 0{\cdot}867 \sqrt[2]{\frac{D}{A}}$	fer forgé	fonte

Le tableau suivant contient les résultats calculés de ces formules pour un certain nombre de cas:

$\frac{A}{d}$	$\frac{D}{d}$ arbre et tourillon en fer forgé.	$\frac{D}{d}$ arbre en fonte, tourillon en fer forgé.	$\frac{A}{D}$	$\frac{d}{D}$ arbre et tourillon en fer forgé.	$\frac{d}{D}$ arbre en fonte, tourillon en fer forgé.
4	1·429	1·746	2	0·828	0·613
5	1·539	1·881	3	0·676	0·501
6	1·635	1·999	4	0·585	0·433
7	1·722	2·104	5	0·524	0·388
8	1·800	2·200	6	0·478	0·354
9	1·872	2·288	7	0·443	0·328
10	1·939	2·370	8	0·414	0·307
12	2·060	2·518	9	0·390	0·289
14	2·169	2·651	10	0·370	0·274
16	2·268	2·772	11	0·353	0·261
18	2·359	2·883	12	0·338	0·250
20	2·443	2·986	13	0·325	0·240

Pour les dimensions d'un bras de manivelle, on ne peut pas établir de règles rationnelles et on doit se contenter de règles empiriques. Suivant la position de la manivelle par rapport à la bielle, ce bras se trouve soumis à des efforts de flexion, de traction, de compression et même de torsion et on comprend facilement que, pour établir une règle rationnelle, tenant compte de tous ces genres d'efforts, on se trouverait conduit à de très grandes complications. Il convient donc de se borner à une règle empirique, conduisant à des dimensions suffisamment fortes pour

que les erreurs résultant de son application ne puissent avoir aucune conséquence fâcheuse.

Les fig. 5 et 6 de la pl. XXI représentent une manivelle en fonte et une manivelle en fer forgé, et indiquent en même temps les règles empiriques suivies pour déterminer les dimensions du bras et du moyeu; ces règles ont été établies par induction, en partant des dimensions observées sur des manivelles d'une bonne construction.

Lorsqu'on a à construire des leviers à manivelle qui ne sont pas soumis à l'action de masses, comme par exemple les leviers de distribution d'une machine à vapeur, on peut employer, pour déterminer les dimensions des bras. les formules que nous avons données. page 237.

Un exemple va nous permettre d'éclaircir les règles relatives à la construction des manivelles.

La longueur du bras d'une manivelle doit être de 50 centimètres. le diamètre du tourillon de 10 centimètres, quelles doivent être les dimensions de l'arbre et du corps de la manivelle, en supposant la manivelle et le tourillon en fer forgé?

On a $A = 50$, $d = 10$, d'où $\frac{A}{d} = 5$; la table précédente donne $\frac{D}{d} = 1{\cdot}539$ et par suite $D = 1{\cdot}539 \times 10 = 15{\cdot}39$. La règle empirique indiquée dans la fig. 6, pl. XXI donne d'ailleurs:

Diamètre du moyeu du tourillon $2{\cdot}42 \times 10$			$= 24{\cdot}2$
Hauteur de ce moyeu $1{\cdot}5 \times 10$			$= 15{\cdot}0$
Diamètre du moyeu de l'arbre $2{\cdot}27 \times 15{\cdot}39$			$= 34{\cdot}9$
Hauteur de ce moyeu $1{\cdot}5 \times 10 + 0{\cdot}056 \times 50$			$= 17{\cdot}8$
Dimensions du bras	vers l'arbre		$= 26{\cdot}8$
			$= 9{\cdot}4$
	vers le tourillon		$= 18{\cdot}0$
			$= 8{\cdot}0$

Arbres coudés.

Au point de vue de la construction, les arbres coudés rentrent dans la catégorie des pièces soumises à plusieurs genres d'efforts.

Pour déterminer les dimensions d'une section quelconque, dans laquelle, par exemple, s'exercent à la fois des efforts de torsion et de flexion, on commence par calculer les dimensions qu'il conviendrait de donner pour résister séparément à chacun

de ces genres d'efforts et on prend en exécution les plus grandes des dimensions ainsi calculées. Nous allons appliquer à quelques exemples ce procédé de construction.

Premier exemple. Soit (fig. 11, pl. XXII) un arbre coudé reposant sur deux supports A et B et dans lequel l'effort exercé sur le tourillon ou le bouton n'est transmis que d'un seul côté.

Le bouton C, le tourillon B, la partie d'arbre $B\,B_1$, ainsi que le bras $B_1\,C$, ne sont soumis qu'à des efforts de flexion.

Le collet A, la partie d'arbre $A\,A_1$ et le bras $A_1\,C$, sont soumis d'abord à la flexion exactement comme la partie $C\,B_1\,B$ et en outre à la torsion.

Désignons par:

P, la pression exercée sur le bouton de manivelle C,
r, le rayon de la manivelle ou la longueur du bras de manivelle,
l, la distance du milieu de chacun des tourillons A et B au plan moyen de la manivelle,
d, le diamètre du bouton de manivelle C,
d_1, le diamètre du tourillon B,
c_1, la longueur de ce tourillon,
D, le diamètre du collet A,
S T, les intensités des tensions relatives à la flexion et à la torsion. Pour le tourillon B, on a la relation:

$$\frac{P\,c_1}{2} = S\,\frac{\pi}{32}\,d_1^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Le moment qui tend à produire la rupture du bouton C est $\frac{P}{2}\,l$; on a, par suite:

$$\frac{P}{2}\,l = S\,\frac{\pi}{32}\,d^3 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Le moment de torsion auquel se trouve soumis le collet A est $P\,r$; on a donc:

$$P\,r = T\,\frac{\pi}{16}\,D^3 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

De ces équations on tire:

$$d_1 = \sqrt[2]{\frac{16}{\pi S}\,\frac{c_1}{d_1}}\,\sqrt{P}, \quad D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi S}}\,\sqrt[3]{P\,r}, \quad \frac{d}{D} = \sqrt[3]{\frac{T}{S}}\,\sqrt[3]{\frac{l}{r}} \quad (4)$$

Ici encore nous pouvons, comme pour les manivelles simples, nous imposer la condition que toutes les parties présentent le même degré de résistance et prendre pour T la valeur que nous avons admise pour les arbres en fer forgé soumis à la torsion;

nous poserons donc $T = S = 210$ et en prenant de plus $\frac{c_1}{d_1} = 1{\cdot}5$, nous tirerons des équations (4):

$$d_1 = 0{\cdot}18 \sqrt[3]{P}, \quad D = 0{\cdot}33 \sqrt[3]{P\, r}, \quad \frac{d}{D} = \sqrt[3]{\frac{l}{r}} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Ces trois quantités d, d_1, D ainsi calculées, le tracé de l'arbre peut se faire de la manière suivante; on commence par tracer d'abord les tourillons B et C, ainsi que le collet A; puis on prend $b\, b_1 = d$ et on relie les points b et b_1, d'un côté avec les points c, c_1, de l'autre, avec les points e, e_1, en supposant que d soit plus grand que D. Si on avait, au contraire, $D > d$, il faudrait faire la portion d'arbre A A_1 cylindrique, en lui donnant le diamètre D. Pour construire le bras, on peut admettre comme règle que sa section doit être très sensiblement équivalente à celle du bouton, c'est-à-dire à $\frac{\pi\, d^2}{4}$

Second exemple. L'effort exercé sur le bouton de la manivelle doit se transmettre exactement par moitié de chaque côté, c'est-à-dire que l'arbre coudé doit être symétrique (fig. 12, pl. XXII).

Dans ce cas, les deux parties A A_1 C et B B_1 C doivent être identiques; le bouton C est soumis à une pression P; à chacun des collets correspond un moment de torsion $\frac{1}{2}$ P r et de plus un effort de flexion égal à $\frac{1}{2}$ P; mais comme le diamètre nécessaire pour résister à la torsion se trouve ici beaucoup plus grand que celui qu'exigerait la flexion, il en résulte que les collets A et B doivent être tracés avec le diamètre qui correspond au moment de torsion. On a donc, dans ce cas, les relations suivantes:

$$\frac{P}{2}\, l = S\, \frac{\pi}{32}\, d^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}\, P\, r = T\, \frac{\pi}{16}\, D^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Ou

$$\left.\begin{array}{l} D = \sqrt[3]{\dfrac{16}{\pi\, T}} \; \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\, P\, r} \\ \dfrac{d}{D} = \sqrt[3]{2\, \dfrac{T}{S}} \; \sqrt[3]{\dfrac{l}{r}} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

si on prend, comme précédemment, $S = T = 210$, ces formules deviennent:

$$\left.\begin{aligned} D &= 0{\cdot}33 \sqrt[3]{\frac{1}{2} P r} \\ \frac{d}{D} &= 1{\cdot}26 \sqrt[3]{\frac{l}{r}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Bielles.

Les bielles qu'on emploie pour transmettre à une manivelle le mouvement de va et vient d'un piston sont généralement en fer forgé; on ne les fait guère en fonte que pour les fortes machines à balancier.

Les bielles en fer forgé ont ordinairement une section circulaire ou rectangulaire, tandis que pour les bielles en fonte la forme en croix est préférable Les extrémités d'une bielle portent le nom de têtes de bielle; elles sont disposées de manière à saisir convenablement les tourillons de la manivelle et du balancier.

Pour établir des règles permettant de déterminer les dimensions des principaux éléments d'une bielle, prenons la forme la plus simple, représentée par la fig. 1, pl. XXIII et qui est celle d'une bielle en fer forgé; désignons par d le diamètre d'un œil à l'extrémité de cette bielle, par l la longueur entre les centres, d_1 le diamètre de la section circulaire au milieu de la pièce, c la hauteur du moyeu de l'œil ou la longueur du tourillon correspondant, σ l'intensité de la tension pour ce tourillon, ε le module d'élasticité de la matière, P l'effort transmis par la bielle agissant par compression, $m\,P$ l'effort pour lequel la bielle commencerait à fléchir; nous pouvons alors écrire les relations suivantes.

Pour le tourillon:

$$P \frac{c}{2} = \frac{\sigma \pi}{32} d^3 \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pour la bielle (en vertu de la relation (16) page 45):

$$m\,P = \frac{\varepsilon \pi^3}{64} \frac{d_1^4}{l^2} \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

L'élimination de P entre ces deux équations donne:

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt[4]{\frac{4\,m\,\sigma}{\varepsilon\,\pi^2} \cdot \frac{d}{c}} \sqrt[2]{\frac{l}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

On ne peut guère songer à déterminer à priori le nombre m et il est bien préférable de chercher à déterminer empiriquement la valeur complète du premier radical, au moyen de mesures prises sur des bielles convenablement établies; j'ai trouvé ainsi qu'on pouvait prendre:

$$\sqrt[4]{\frac{4\,m\,\sigma}{\varepsilon\,\pi^2} \cdot \frac{d}{c}} = 0{\cdot}229 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Maintenant, pour les tourillons en fer, on a:

$$\sigma = 210, \quad \varepsilon = 1500000, \quad \frac{d}{c} = \frac{2}{3}$$

la substitution de ces nombres donne:

$$m = \frac{1}{4}\,(0{\cdot}229)^4\,\frac{\varepsilon\,\pi^2}{\sigma} \cdot \frac{c}{d} = 72$$

Les bielles en fer forgé sont donc en réalité établies de telle sorte qu'elles ne puissent commencer à fléchir que sous un effort 72 fois plus grand que celui qu'elles ont à transmettre.

Si on voulait s'imposer la condition de faire coincider le commencement de flexion de la bielle avec la rupture du tourillon, il faudrait faire, dans l'équation (3), $m = 1$, $\sigma = 4000$ (résistance du fer forgé en barres épaisses), $\varepsilon = 1500.000$, $\frac{d}{c} = \frac{2}{3}$ et on trouverait:

$$\frac{d_1}{d} = 0{\cdot}16 \sqrt[2]{\frac{l}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

La valeur que nous trouvons ici pour le coefficient numérique du second membre ne s'accorde pas avec celle qui figure dans la relation (4); on peut toutefois en tirer cette conclusion que dans les bielles en fer forgé, telles qu'on les construit réellement, la rupture du tourillon devrait se produire avant le commencement de flexion de la bielle.

En admettant le coefficient 0·229, nous trouvons:

$$\frac{d_1}{d} = 0{\cdot}229 \sqrt{\frac{l}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

formule qui donne les résultats numériques suivants:

pour $\frac{l}{d}$ =	12	16	20	24	28	32	36	40
$\frac{d_1}{d}$ =	0·79	0·92	1·02	1·12	1·21	1·30	1·37	1·45

Il est facile de passer d'une section circulaire à une section rectangulaire au moyen des règles que nous avons établies pour l'équivalence des sections.

Au point de vue de la compression, deux sections, l'une circulaire, l'autre rectangulaire, sont équivalentes, si on a:

$$\frac{\varepsilon}{12}\,\pi^2\,\frac{a\,b^3}{l^2} = \frac{\varepsilon\,\pi^2}{64}\,\frac{d_1^4}{l^2}$$

d'où on tire:

$$\frac{b}{d_1} = \sqrt[4]{\frac{6\,\pi}{32}\left(\frac{b}{a}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

b représentant la plus petite dimension de la section rectangulaire.

Cette formule donne:

pour $\frac{a}{b}$ =	1	1·25	1·5	2·0	2·5	3·0	3·5	4·0
$\frac{b}{d_1}$ =	0·87	0·82	0·78	0·73	0·69	0·66	0·63	0·61
$\frac{a}{d^1}$ =	0·87	1·02	1·17	1·46	1·73	1·98	2·21	2·44

Il convient de ne pas exagérer le rapport $\frac{a}{b}$, pour ne pas être conduit à des dimensions trop considérables; en général ce rapport reste compris entre 1 et 1·5.

Pour les bielles en fonte, on peut adopter une des formes que représentent les fig. 4, 5, 6, pl. XXIV. La partie inférieure de toutes ces bielles a une forme spéciale sur une longueur un peu plus grande que celle de la manivelle; sur deux des côtés elle est terminée par deux faces planes parallèles, tandis que sur les deux autres, les faces sont légèrement arrondies. La partie moyenne présente un profil longitudinal convexe et une section en croix; quant à la partie supérieure, elle se termine par une fourchette.

Nous allons essayer d'appliquer la méthode des nombres proportionnels à la recherche d'une règle qui permette de déterminer les dimensions de la section, au milieu de la pièce.

En désignant par l la longueur totale de la bielle, h la hauteur et b l'épaisseur de la nervure au milieu, d le diamètre du tourillon de la manivelle, c sa longueur, P la force que la bielle doit transmettre, nous aurons facilement les équations suivantes.

Pour le tourillon:

$$P \frac{c}{2} = \frac{\sigma \pi}{32} d^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Pour la section du milieu de la bielle:

$$m P = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

où on doit prendre:

$$E = \frac{1}{6 h} \left[h b^3 + b (h^3 - b^3) \right], \quad z = \frac{h}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

et où $m P$ représente l'effort pour lequel la bielle commencerait à fléchir. En opérant par approximation, on peut dans l'expression (10) négliger $h b^3$ et b^4 par rapport à $b h^3$; dans ce cas la relation (9) devient:

$$m P = \frac{\varepsilon}{12} \pi^2 \frac{b h^3}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

et l'élimination de P entre les équations (8) et (11) donne:

$$\frac{b}{h} = \frac{3}{4} \frac{m \sigma}{\pi \varepsilon} \left(\frac{d}{c}\right) \left(\frac{l}{h}\right)^4 \left(\frac{d}{l}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Têtes de bielles. Les extrémités d'une bielle (les têtes) doivent être disposées, comme nous l'avons dit, de manière à recevoir convenablement les tourillons de la manivelle et du balancier; une tête de bielle est donc essentiellement un support d'arbre. En général le tourillon, comme dans les paliers ordinaires, est entouré d'un coussinet en cuivre ou en bronze, formé de deux parties qui, à l'intérieur offrent la courbure du tourillon, tandis qu'à l'extérieur elles se terminent par des faces planes. Ces deux parties du coussinet placées dans la tête de bielle sont maintenues contre le tourillon au moyen d'une clavette.



Lorsque le coussinet, par suite de l'usure, a pris un certain jeu, on resserre la clavette; il est évident que dans ce cas le coussinet n'embrasse plus entièrement tout le contour du tourillon. Si la moitié du coussinet sur laquelle agit la clavette se trouve à l'intérieur, c'est-à-dire est la plus rapprochée du milieu de la pièce, le serrage de la clavette a pour résultat d'augmenter la longueur de la bielle, tandis qu'au contraire il tend à se produire un raccourcissement, lorsque la clavette agit sur la moitié extérieure du coussinet. Pour arriver à conserver à l'axe du tourillon sa position relative, et éviter par suite l'allongement ou le raccourcissement de la bielle, on doit recourir à l'emploi de deux clavettes, agissant l'une sur la moitié intérieure du coussinet, l'autre sur la moitié extérieure. Dans la plupart des cas de la pratique, il est très important que la longueur théorique de la bielle (la distance des centres des tourillons) ne soit pas modifiée par l'action du serrage des clavettes. On peut arriver à ce résultat de deux manières: 1°, en disposant les clavettes sur les deux têtes de la bielle, de manière à ce que l'allongement produit par le serrage de l'une soit compensé par le raccourcissement du serrage de l'autre; 2°, en ayant recours pour chaque tête de bielle à un double clavetage.

Ce dernier moyen n'est du reste que rarement employé, car il a l'inconvénient d'être plus compliqué et d'un prix plus élevé que le premier. C'est surtout pour les bielles couplées des locomotives qu'il est de la dernière importance de conserver exactement la longueur théorique, afin d'éviter les pressions excessives qui se produiraient sur les tourillons, si cette distance devenait un peu plus grande ou un peu plus petite que la distance des axes des roues couplées par les bielles.

Construction des bielles. Dans la plupart des cas, les bielles et leurs têtes sont faites en fer forgé; toutefois, pour les grandes machines à balancier, on fait généralement usage de bielles en fonte. Quelquefois aussi il peut être avantageux d'avoir pour la bielle un poids aussi faible que possible et on a recours alors à l'emploi de l'acier.

La construction d'une bielle en fer forgé exige beaucoup de travail et est par suite très dispendieuse. Il faut en effet commencer par forger la bielle avec ses têtes, sans ménager d'ouvertures dans ces dernières parties, et dresser ensuite toutes les surfaces extérieures, au moyen de la limeuse, de la machine

à raboter et du tour. Ce travail terminé, on trace sur chaque tête la forme de l'ouverture nécessaire pour l'etablissement du coussinet du tourillon et en suivant ce tracé, on perce, à côté les uns des autres, une série de trous; on détache ensuite au marteau la pièce limitée par ces trous et on termine à la lime la surface intérieure de l'ouverture.

Balanciers.

On réserve généralement l'emploi du balancier pour les machines à vapeur d'une certaine importance; les matériaux dont on fait usage pour sa construction sont la fonte, la tôle et le fer forgé. Jusqu'à 200 quintaux on peut sans inconvénients, employer la fonte, mais au dessus de ce poids il est préférable de recourir à la tôle ou au fer forgé; lorsqu'en effet le poids d'un balancier atteint une certaine limite, on est exposé à toutes les imperfections que nous avons précédemment indiquées pour le moulage des pièces en fonte d'une grande épaisseur. les vides, les soufflures, etc., et il règne par suite une très grande indétermination sur le degré de résistance que présente la pièce.

Les fig. de la planche XXIII représentent différentes formes de balanciers et certains modes de construction.

La fig. 2 donne un balancier en fonte pleine. Les tourillons des extrémités. destinés à recevoir la bielle et le parallélogramme, se trouvent fixés sur des anneaux, qui peuvent tourner autour de tourillons rapportés aux deux extrémités du balancier, dans la direction de son axe longitudinal, et réunis solidement avec lui par des clavettes. Cette disposition un peu compliquée a pour but de rendre plus rigoureuse les liaisons du balancier avec le parallélogramme et la bielle; on comprend, en effet, que, lorsque les tourillons extrêmes traversent simplement les têtes du balancier, il puisse arriver souvent que les trous percés pour les recevoir n'aient pas leurs axes exactement parallèles à l'axe de rotation du balancier et que, par suite, ce dernier axe étant horizontal, la bielle et les tiges du parallélogramme soient inclinées sur la verticale.

Les dimensions d'un balancier de cette nature peuvent se déterminer de la manière suivante.

Nous supposerons données la longueur $2l$ du balancier et l'effort P qui s'exerce à chaque extrémité et comme, au point de

vue de la forme, il doit exister un rapport déterminé entre la hauteur h et la longueur l du balancier, nous prendrons $h = \frac{1}{3} l$. En négligeant le poids du balancier, la pression sur chacun des tourillons de l'axe se trouve précisément égale à P et on a, par suite, pour le diamètre de ces tourillons $d = 0{\cdot}18 \sqrt{P}$. Le coefficient $0{\cdot}18$, à proprement parler, correspond à un tourillon en fonte, tandis que les axes de balanciers sont toujours en fer forgé, mais on peut admettre qu'on compense ainsi approximativement l'erreur provenant de ce qu'on néglige le poids du balancier. Le diamètre d'un tourillon fixé sur un des anneaux de l'extrémité est $0{\cdot}18 \sqrt{\frac{1}{2} P} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}7\, d$. La longueur de l'axe du balancier peut être prise égale à $0{\cdot}5\, l$. Quant aux dimensions de la section, elles peuvent être déterminées par la méthode des nombres proportionnels.

Comme la nervure droite du milieu est simplement destinée à donner une certaine raideur dans le sens horizontal, nous pouvons la négliger et calculer la section comme si elle avait la forme d'un I. D'après les règles établies précédemment pour la flexion, nous aurons les relations suivantes.

Pour un tourillon de l'axe du balancier:

$$\frac{1}{2} P c = \frac{\sigma_1 \pi}{32} d^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pour la section du corps du balancier (en vertu des résultats de la pl. III):

$$P l = \frac{\sigma}{6 b} \left[b_1 h_1^3 + b (h^3 - h_1^3) \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dans ces expressions, c représente la longueur d'un des tourillons de l'axe, σ et σ_1 les valeurs qu'on doit prendre pour les tensions de la fonte et du fer forgé. En éliminant P entre ces deux équations, on obtient:

$$\frac{b_1}{h} = \frac{\frac{6 \pi \sigma_1}{16 \sigma} \frac{d}{c} \frac{l}{h} \left(\frac{d}{h}\right)^2}{\left(\frac{h_1}{h}\right)^3 + \frac{b}{b_1}\left[1 - \left(\frac{h_1}{h}\right)^3\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Les rapports $\frac{d}{c}$, $\frac{l}{h}$, $\frac{h_1}{h}$, $\frac{b}{b_1}$ peuvent être pris arbitrairement entre certaines limites et on peut poser:

$$\frac{d}{c} = \frac{2}{3}, \quad \frac{l}{h} = 3, \quad \frac{b_1}{h} = \frac{7}{8}, \quad \frac{b}{b_1} = 2$$

Pour que l'axe et le corps du balancier présentent le même degré de résistance, on doit prendre $\frac{a_1}{a} = \frac{4000}{3000} = \frac{4}{3}$; en portant ces valeurs dans l'expression (3) on obtient:

$$\frac{b_1}{h} = 2{\cdot}36 \left(\frac{d}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Si on a, par exemple, $P = 7855$, $l = 300$ centimètres, les règles précédentes donnent:

Diamètre d'un tourillon de l'axe $0{\cdot}18\sqrt{7855}$ . . = 16 centim.
Diamètre d'un tourillon des extrémités $0{\cdot}7 \times 16$ = 11 »
Hauteur du balancier $h = \frac{l}{3}$ . . . . = 100 »
$\frac{d}{h} = \frac{16}{100}$ et l'équation (4) donne $\frac{b_1}{h} = 2{\cdot}36\left(\frac{16}{100}\right)^2$ = 0·06
par suite $b_1 = 0{\cdot}06 \times 100$ . . . . = 6 »
et comme $\frac{h_1}{h} = \frac{7}{8}$, $\frac{b}{b_1} = 2$, on trouve { . . h_1 = 87·5 ; . . b = 12

La fig. 3, pl. XXIII représente un balancier en fonte à treillis. Ce balancier offre à la fois beaucoup de légèreté et de solidité. Il se termine par des lignes droites, ce qui facilite l'exécution du modèle; on rencontre très fréquemment cette forme de balancier dans les grandes machines à vapeur destinées à faire mouvoir des pompes; dans le calcul de la résistance, on ne tient généralement compte que de la section que du bandeau extérieur, en négligeant le treillis proprement dit.

La fig. 4, pl. XXIII est l'élévation d'un balancier en tôle et les fig. 7, 8 et 9 donnent les sections de trois dispositions de balanciers formés de cette matière; la première (fig. 7) correspond à une petite machine, la seconde à une plus forte et enfin la troisième se rapporte à une machine d'une grande puissance. L'emploi d'un balancier de ce genre exige un travail considérable, mais, par contre, il présente beaucoup plus de sécurité que celui d'un balancier en fonte, lorsque la construction a été faite avec soin. Il est essentiel que toutes les rivures soient convenablement disposées, ce qui n'est pas sans difficultés, principalement pour les parties où il y a plusieurs rangs de rivets, comme dans la fig. 9. L'établissement des moyeux en fonte pour les tourillons entraine un affaiblissement notable des tôles formant

les deux faces principales; aussi doit-on avoir soin de réduire le diamètre de chaque moyeu, le plus possible, dans la partie qui doit traverser la tôle; cette réduction de diamètre a d'ailleurs l'avantage d'empêcher le déplacement du moyeu par rapport aux faces du balancier.

La fig. 5, pl. XXIII représente un gros balancier, formé de trois pièces de fonte; un balancier de ce genre, construit dans l'établissement de Seraing, fait partie d'une machine d'élévation d'eau, aux mines de Bleiberg.

Le principal avantage de ce mode de construction tient à ce qu'on n'a à employer que des pièces de fonte dont le poids n'a rien d'exagéré et que par suite on a une assez grande probabilité d'obtenir, pour les différentes parties du balancier, une fonte sans défauts; il est évident d'ailleurs qu'il faut apporter un soin tout particulier aux assemblages des différentes pièces de fonte.

Ces trois dernières dispositions de balancier ne sont que rarement employées et il ne nous parait inutile dès-lors de chercher des règles qui leur soient spécialement applicables. Les formules générales, que nous avons établies pour les rapports des résistances, permettent en tous cas, d'arriver aux résultats dont on peut avoir besoin: ce mode de calcul, il est vrai, présente quelques complications, mais c'est là un assez faible inconvénient pour des pièces qu'on ne rencontre qu'accidentellement dans la construction.

Traverses.

On désigne sous le nom de traverse un organe de machine à vapeur qui n'est exposé qu'à des efforts de flexion et qui est ordinairement relié, en son milieu à la tige du piston, et à ses deux extrémités, au moyen de bielles, à la manivelle ou au balancier.

Les fig. 1, 2, 3, 4, pl. XXV représentent deux dispositions différentes de traverses.

La première, qui à la forme d'un balancier de petites dimensions est reliée par un boulon à une pièce à fourchette (fig. 2 et 3) qui reçoit l'extrémité de la tige du piston. La seconde (fig. 4) porte en son milieu une ouverture dans laquelle pénètre la tige du piston, qui se trouve maintenue au moyen d'une cla-

vette transversale. La traverse de la fig. 1 exige moins de travail que celle de la fig. 4, mais elle entraine la construction de la tête à fourche, qui est assez délicate. Les surfaces verticales de ces deux formes de traverses sont des surfaces planes, terminées par des surfaces légèrement arrondies; les parties supérieures et inférieures sont formées par des surfaces de rotation, qu'on peut facilement obtenir sur le tour et qui par leur intersection avec les faces verticales donnent des arêtes parfaitement nettes.

En désignant par A la demi-longueur de la traverse, d le diamètre, c la longueur d'un des tourillons des extrémités, b et h les dimensions de la section du milieu, P la pression sur un tourillon, on a, comme pour les leviers ordinaires:

$$d = 0{\cdot}12 \sqrt{P}$$

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{6\,\pi}{16}\left(\frac{h}{b}\right)\left(\frac{A}{d}\right)\left(\frac{d}{c}\right)}$$

Pour les traverses on peut prendre $\frac{h}{b} = 3$, $\frac{d}{c} = \frac{2}{3}$ et on a alors:

$$\frac{h}{d} = 1{\cdot}344 \sqrt[3]{\frac{A}{d}}$$

Cette formule donne les résultats numériques suivants:

Pour $\frac{A}{d}$ =	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{h}{d}$ =	2·13	2·27	2·42	2·54	2·69	2·77	2·87	3·04	3·21

Si on a, par exemple, $A = 100$, $d = 10$, cette table donne $\frac{h}{d} = 2{\cdot}90$; par suite $h = 2{\cdot}9$, $d = 2{\cdot}9$ et $b = \frac{1}{3}\, h = 9{\cdot}67$.

Des tuyaux et de leurs assemblages.

Les tuyaux servent à différents usages, mais on les emploie surtout pour la conduite de l'eau, des gaz, de la vapeur, et en général de tous les fluides; la matière à employer pour leur construction se détermine d'après l'usage auquel on les destine; c'est ainsi qu'on emploie non seulement les métaux les plus différents,

mais encore le bois, le verre, la pierre, le caoutchouc, le cuir, etc. Les tuyaux d'une grande longueur sont toujours formés par la réunion d'un certain nombre de bouts de tuyaux, dont nous examinerons plus loin les différents modes d'assemblages.

Dimensions. La section Ω d'un tuyau est déterminée à la fois, par la quantité de fluide Q qui doit le traverser par seconde et la vitesse u avec laquelle ce fluide doit se mouvoir. Ces deux quantités Q et u sont toujours données et on a $\Omega = \frac{Q}{u}$; on en déduit, pour le diamètre d du tuyau, $d = \sqrt{\frac{4\,\Omega}{\pi}}$; suivant l'usage que nous avons adopté jusqu'ici, u est exprimé en centimètres, Ω en centimètres carrés et Q en centimètres cubes. Pour les tuyaux de conduite d'eau et de gaz, la vitesse est ordinairement de 1 mètre par seconde et, par suite, $u = 100$ centimètres.

L'épaisseur des tuyaux dépend à la fois de la pression des fluides qui les traversent, des procédés de fabrication, et enfin de différentes circonstances pratiques. Si on n'avait à tenir compte que de la pression intérieure, il serait facile d'établir une formule rationnelle pour l'épaisseur à donner aux parois; en se reportant à l'équation (12) de la page 64 on pourrait écrire approximativement:

$$\delta = A\,(n - 1)\,d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en désignant par δ l'épaisseur, d le diamètre intérieur du tuyau et n le nombre d'atmosphères représentant la pression intérieure.

Pour une faible pression intérieure, cette formule donne nécessairement des épaisseurs très faibles, ne permettant pas, dans certains cas, de construire le tuyau ou incapables de résister à l'action de forces accidentelles; les forces de cette espèce, de même que le mode de fabrication, ne peuvent pas être introduits rationnellement dans une formule et on ne peut guère en tenir compte que par l'addition d'une constante; on posera donc:

$$\delta = A\,(n - 1)\,d + B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

B désignant une constante, dont la valeur se détermine d'après la nature du métal dont le tuyau est formé.

On obtient ainsi pour différentes espèces de tuyaux le tableau suivant:

Tôle	$\delta = 0.00125\ (n - 1)\ d + 0.30$	centim.
Fonte	$\delta = 0.00400\ (n - 1)\ d + 0.50$	
Cuivre	$\delta = 0.00200\ (n - 1)\ d + 0.10$	
Plomb	$\delta = 0.04000\ (n - 1)\ d + 0.10$	
Zinc	$\delta = 0.02500\ (n - 1)\ d + 0.10$	
Bois	$\delta = 0.03230\ (n - 1)\ d + 2.70$	
Pierre naturelle . .	$\delta = 0.03690\ (n - 1)\ d + 3.00$	
Pierre artificielle . .	$\delta = 0.05380\ (n - 1)\ d + 4.00$	

Dans les tuyaux métalliques le coefficient A est déterminé de manière à ce que, en négligeant le terme B, le tuyau, sous une pression de n atmosphères, se trouve soumis à $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue à la rupture. Quant à la valeur du coefficient B, elle dépend, pour chaque tuyau, comme nous l'avons dit, de la nature du métal et aussi du mode de fabrication. Pour les tuyaux en tôle on ne peut guère descendre, comme épaisseur, au-dessous de 3 millimètres; avec la fonte, la limite inférieure est de 5 millimètres, en raison des inégalités d'épaisseur qu'on ne peut jamais éviter complétement et qui offrent naturellement d'autant plus d'inconvénients que le tuyau est plus mince; on est d'ailleurs également conduit à augmenter l'épaisseur des parois pour se mettre à l'abri de l'influence des trous qui se forment çà et là dans la fonte. Pour les tuyaux en cuivre, en plomb et en zinc, on peut prendre B égal à 1 millimètre seulement; les procédés employés pour la fabrication de ces tuyaux permettent de descendre, sans inconvénients, à une épaisseur limite aussi faible.

En dehors des tuyaux destinés à la conduite de l'eau, des gaz ou de la vapeur, on utilise la forme cylindrique pour d'autres usages; mais pour tous les appareils qui présentent une certaine importance, comme les cylindres de machines à vapeur, les cylindres de presses hydrauliques, les chaudières, etc., il convient de recourir à des règles spéciales.

La longueur l, qu'on peut adopter pour les tuyaux en fonte, qui par leur réunion doivent former une conduite d'eau ou de gaz, est donnée par la formule empirique $l = 200 + 5\ d$.

Il nous reste maintenant à dire quelques mots des assemblages des différents tuyaux.

Assemblage de tuyaux en fonte. Pour réunir les tuyaux en fonte, on fait usage de brides ou de manchons. Dans l'assemblage à brides représenté fig. 5, pl. XXV, le serrage se fait au

moyen de boulons; un des grands avantages de ce mode d'assemblage, c'est que les différents tuyaux d'une conduite peuvent s'enlever et se remplacer avec la plus grande facilité; toutefois il ne présente de sérieuses garanties de durée que dans les installations où les boulons ne sont pas exposés à l'action de la rouille et à d'autres causes accidentelles de détérioriation. On ne doit donc pas avoir recours à ce mode d'assemblage pour les conduites d'eau et de gaz qui doivent être simplement enterrées dans le sol, car dans ce cas les boulons ne tarderaient pas à se rouiller et par suite à se rompre; de plus la pression, due à la charge de terre, ne serait pas sans inconvénient pour un assemblage de cette nature. Dans les grandes villes, où les conduites d'eau et de gaz, au lieu d'être enterrées dans le sol, sont souvent logées dans des aqueducs en maçonnerie et y sont installées avec beaucoup de précaution', on peut à la rigueur faire usage de l'assemblage à brides.

Mais ce mode d'assemblage doit surtout être utilisé pour les tuyaux de conduites d'eau, de gaz et de vapeur qui doivent être établis dans des lieux parfaitement secs et dont la pose doit être faite avec beaucoup de soin.

Les brides doivent avoir le plus souvent un assez grand diamètre et une assez faible épaisseur; leur longueur est déterminée par la condition que les écrous des boulons trouvent à se loger; par rapport au tuyau, la bride joue le rôle de nervure et à ce point de vue il convient de lui donner une certaine épaisseur. L'examen d'un grand nombre de conduites, installées dans de bonnes conditions, m'a conduit, par induction, aux règles suivantes:

Longueur du rebord $1 + 1{\cdot}8\ \delta$,
Epaisseur de la bride $0{\cdot}33 + 1{\cdot}17\ \delta$,
Nombre des boulons $3 + \frac{d}{7}$
Diamètre d'un boulon $0{\cdot}33 + 1{\cdot}17\ \delta$.

δ représentant l'épaisseur de la paroi du tuyau.

Pour rendre étanche le joint de deux brides de tuyaux, on peut recourir à plusieurs procédés qui varient avec les circonstances, mais dans tous les cas les surfaces de ces brides doivent être parfaitement dressées (tournées ou rabotées).

Pour les tuyaux de conduite d'eau et de gaz, on peut se contenter d'interposer entre les brides des rondelles de cuir ou de carton huilé, du mastic au blanc de céruse ou au minium.

Pour les tuyaux de vapeur, il est préférable de recourir à l'emploi de rondelles de cuivre mou d'une très faible épaisseur qu'on comprime entre les surfaces des brides.

L'assemblage à manchon (fig. 6, pl. XXV) est, pour ainsi dire, inusable; mais il présente le grave inconvénient d'exiger beaucoup de travail pour le remplacement d'un tuyau isolé. Chaque tuyau d'une conduite, établie avec ce mode d'assemblage, est terminé à l'une de ses extrémités par un faible rebord et à l'autre par une partie d'un diamètre plus considérable qu'on nomme le manchon. Pour faire le joint, on introduit l'extrémité à rebord d'un des tuyaux dans le manchon de l'autre et on garnit l'intervalle en y coulant du plomb ou y comprimant du mastic de fonte. L'emploi du plomb offre cet avantage que le joint peut être facilement défait en faisant fondre le plomb au moyen de quelques charbons enflammés; le mastic de fonte, au contraire, donne un assemblage très résistant qu'il devient, sinon impossible, du moins très difficile de défaire au bout d'un certain temps. Pour les tuyaux de conduite d'eau et de gaz qui doivent être enfoncés dans le sol et qui, par suite, sont fortement exposés à la rouille, il convient d'employer l'assemblage à manchons, avec joint au plomb.

Les tuyaux d'eau et de gaz doivent toujours être établis à une assez grande profondeur au-dessous du sol, pour n'éprouver que de très faibles variations de température avec les saisons; cette remarque offre une importance exceptionnelle pour les conduites d'eau destinées à la boisson.

Il arrive quelquefois que, dans une conduite d'eau, certains tuyaux doivent être assemblés de manière à pouvoir se déplacer légèrement les uns par rapport aux autres. C'est, par exemple, ce qui se présente pour les tuyaux, établis à l'air libre, qui se trouvant exposés aux chaleurs de l'été et aux froids de l'hiver s'allongent dans la première période et se raccourcissent dans la seconde. Les fig. 11 et 12, pl. XXVI représentent les assemblages à dilatation, qu'il convient d'employer dans les cas de ce genre.

Construction et assemblage des tuyaux en fer. Les tuyaux en fer qu'on emploie dans la pratique ont généralement des diamètres ou très petits ou très grands; on ne fait pour ainsi dire jamais usage de tuyaux en fer d'un diamètre moyen. La raison en est facile à comprendre: les tuyaux d'un très petit

diamètre, de 2, 3, 4 centimètres, par exemple, peuvent être facilement soudés et étirés, comme on le fait pour les conduites de vapeur, de gaz, les tuyaux de chaudières de bateaux et de locomotives.

Les tuyaux d'un grand diamètre, au contraire, de 30 à 60 centimètres et plus, peuvent être faits en tôle rivée. Quant aux tuyaux de 10 à 20 centimètres, il est très difficile de les obtenir en fer, car d'un côté, avec de semblables dimensions, la soudure et l'étirage se font très mal et d'un autre côté, on ne peut guère recourir à la rivure, par suite de l'impossibilité presque complète de soutenir les têtes de rivets à l'intérieur.

Les petits tuyaux en fer de 2, 3, 4 centimètres de diamètre intérieur s'assemblent à l'aide de manchons filetés, comme l'indiquent les fig. 7 et 8, pl. XXVI.

Pour les larges tuyaux de 60 centimètres et plus de diamètre, on peut les réunir en les engageant les uns dans les autres et en les rivant, comme on le fait, par exemple, pour les chaudières cylindriques; on peut encore river aux extrémités des tubes des cornières, qui forment alors de véritables brides qu'on n'a plus qu'à réunir par des boulons.

Le premier de ces modes d'assemblages donne une liaison invariable, tandis que dans le second on peut facilement séparer les tuyaux, ce qui est indispensable dans plusieurs circonstances.

Tuyaux de cuivre et de laiton. Pour préparer les tuyaux de cuivre on a recours à la soudure et à l'étirage. Pour réunir deux tuyaux de ce genre, on emploie des rondelles en fer, qu'on serre fortement, au moyen de boulons, sur les rebords (fig. 7, pl. XXV).

On commence par entrer deux rondelles en fer sur chaque tuyau, dont on rabat ensuite les extrémités pour former les rebords; il suffit alors de rapprocher ces rebords, de faire glisser les rondelles en fer jusqu'à ce qu'elles viennent les toucher et de les serrer au moyen des boulons; ce mode d'assemblage ne laisse absolument rien à désirer au double point de vue de la résistance et de l'étanchéité.

Les tuyaux en laiton peuvent s'assembler de différentes manières; les fig. 3, 4, 5, pl. XXVI donnent quelques uns de ces modes d'assemblage.

Soupapes, Robinets, Tiroirs, Clapets.

Pour établir ou supprimer la communication entre deux parties d'une conduite, on a recours à différents organes, les soupapes, les robinets, les tiroirs, les clapets.

Soupape conique simple. Les soupapes affectent plusieurs formes différentes; elles peuvent être coniques, à boulet ou à clapet. Les soupapes coniques et à boulet sont généralement métalliques; quant aux soupapes à clapets, elles sont tantôt en métal, tantôt en cuir ou en caoutchouc.

Ces différentes soupapes doivent satisfaire à plusieurs conditions essentielles; elles doivent pouvoir s'ouvrir ou se fermer facilement et en temps utile; fermées, elles doivent être complètement étanches; ouvertes, elles ne doivent présenter aucun obstacle sérieux au passage de l'eau ou des fluides. Dans les pompes, l'ouverture des soupapes se produit par la pression de l'eau, tandis que dans les machines à vapeur cet effet ne s'obtient que par suite de liaisons établies entre les soupapes et certains organes mobiles de la machine.

Cherchons quelles sont les formes et les rapports qu'il convient d'adopter pour obtenir des soupapes dans de bonnes conditions.

Considérons une soupape conique de pompe (fig. 8, pl. XXV); désignons par d_1 et d le plus grand et le plus petit diamètre de la partie conique, p_1 la pression exercée par l'eau sur chaque centimètre carré de la surface supérieure de la soupape, q le poids de la soupape, on a alors $\frac{d_1^2 \pi}{4} p_1 + q$ pour expression de l'effort qu'exige le soulèvement de cette soupape.

Dans une pompe, le soulèvement de la soupape de refoulement est dû à l'eau qui se trouve au-dessous; si donc on désigne par p la pression qui doit être exercée sur chaque centimètre carré de la surface inférieure du clapet, pour surmonter la résistance dirigée verticalement de haut en bas, on aura évidemment:

$$\frac{d^2 \pi}{4} p = \frac{d_1^2 \pi}{4} p_1 + q$$

D'où on tire:

$$p = p_1 \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 + \frac{4\,q}{d^2 \pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Le dernier terme dans lequel entre le poids de la soupape peut, dans tous les cas, être négligé par rapport au premier; on peut donc prendre, avec une approximation suffisante $p = p_1 \left(\frac{d_1}{d}\right)^2$; on voit par là que le piston doit produire une pression intérieure très forte, quand le grand diamètre de la soupape est notablement supérieur au plus petit. Dans les soupapes bien établies, on prend généralement $\frac{d_1}{d} = 1{\cdot}2$ et on a, par suite:

$$\frac{p}{p_1} = (1{\cdot}2)^2 = 1{\cdot}44$$

Dans ces conditions, au commencement de sa course, le piston exerce un effort sensiblement de moitié plus fort que celui qu'il a à produire un peu plus tard, quand la soupape s'est soulevée et qui'l n'a plus par conséquent à développer qu'une pression égale à p_1. Au moment de l'ouverture de la soupape, il se produit donc subitement un changement de pression qui donne lieu à des chocs et a des ébranlements et qui, par cela même, entraine d'assez graves inconvénients.

Pour que la soupape repose aussi exactement que possible sur son siège, il est essentiel que les deux surfaces de contact soient complétement semblables, résultat qu'on peut obtenir en rodant la soupape sur son siège, avec interposition d'émeri. Toutefois comme on ne peut compter obtenir un contact tout-à-fait mathématique et que, dans tous les cas, ce contact ne pourrait rester longtemps parfait, on doit s'arranger pour que de petites imperfections de construction n'entrainent pas d'inconvénients sérieux pour la marche; on arrive à ce résultat en donnant une largeur convenable au siège de la soupape (mesurée suivant les génératrices).

On obtient des soupapes d'une forme très satisfaisante en s'imposant comme règle de donner au corps de chaque soupape une hauteur constante qui est généralement de 12 millimètres. D'après cette règle, la largeur du siège augmente avec la grandeur des soupapes; les petites forment des troncs de cône très allongés, tandis que pour les grandes l'aplatissement devient très considérable; aussi pour les soupapes, dont le diamètre atteint 20 centimètres, le tronc de cône peut parfaitement être remplacé par une surface plane.

Supposons qu'au moyen des formules $\frac{d_1}{d} = 1{\cdot}2$ et $h = 1^{\text{cent.}}2$,

on calcule une série de soupapes, échelonnées de manière à ce que le plus petit diamètre de l'une soit égal au plus grand diamètre de la soupape qui vient immédiatement après dans la série; si on vient à superposer toutes ces soupapes par ordre de grandeur, et si on les coupe par un plan passant par l'axe commun, les intersections de ce plan avec les différents troncs de cône formeront un polygone et on peut se proposer de chercher l'équation de la courbe continue passant par les sommets de ce polygone. On trouve facilement que l'équation de cette ligne A M B, fig. 9, pl. XXV, est donné par l'expression:

$$y = A (p)^{\frac{x}{h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en posant $x = o P$, $y = M P$, $\frac{d_1}{d} = p = 1{\cdot}2$, $h = P P_1 = 1^{cent.}2$, et A étant une constante arbitraire qui dépend de la position de l'origine des coordonnées. Pour $x = o$, on a $y = A$, c'est-à-dire que A représente le diamètre de la soupape sur lequel se trouve située l'origine des coordonnées.

Pour assurer une certaine durée à la perfection du contact d'une soupape et de son siège, il est essentiel de leur donner rigourensement la même grandeur, comme dans la fig. 10, pl. XXV; car lorsque la soupape est plus petite que le siège (fig. 11) ou plus grande (fig. 12), le mouvement de la soupape produit une espèce de martelage sur une partie seulement des surfaces de contact et finit par leur faire perdre leur forme conique; on doit avoir soin également d'arrondir légèrement les bords de la soupape et de son siège (fig. 13), afin d'éviter les déformations que pourraient facilement produire des arêtes vives.

Pour que l'eau, lorsque la soupape est ouverte, puisse passer, sans difficulté et sans accélération de vitesse, du tuyau d'aspiration au tuyau de refoulement, il est indispensable que la section annulaire entre le siège et la soupape, aussi bien que celle qui se trouve comprise entre l'arête supérieure de cette soupape et la circonférence intérieure de sa boite, soit équivalente à la section du tuyau d'aspiration.

En désignant par d_2 le diamètre de la boite de la soupape, Δ la distance normale qu'on doit avoir entre les surfaces du corps de la soupape et de son siège, lorsque la soupape est soulevée, on a pour déterminer d_2 et Δ les relations:

$$d_2^2 \frac{\pi}{4} - \frac{d_1^2 \pi}{4} = d \pi \Delta = d^2 \frac{\pi}{4}$$

Par suite:

$$d_2^2 = d^2 \left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]$$

$$\Delta = \frac{d}{4}$$

ou. en remarquant que nous avons posé comme règle qu'on devait prendre $\frac{d_1}{d} = 1{\cdot}2$:

$$d_2 = 1{\cdot}56\ d, \quad \Delta = 0{\cdot}25\ d.$$

La manière dont une soupape est guidée dans son double mouvement de soulèvement et de descente, joue un rôle assez important. Pour les petites soupapes dont le diamètre ne dépasse pas deux centimètres, le guidage se fait au moyen d'une queue, munie de cannelures; pour celles dont le diamètre est compris entre 2 et 6 centimètres, on a recours à un cylindre creux, percé de trous; lorsque le diamètre est supérieur et atteint jusqu'à 10 centimètres, la sonpape est munie d'une queue glissant dans nn guide fixe; enfin, pour les grandes soupapes, elles sont munies de deux queues, l'unc au-dessus, l'autre au-dessous, mobiles également dans des guides fixes; ces différentes dispositions sont représentées fig. 7. 8, 9, 10, pl. XXVII.

Soupapes à double siège. Dans certaines pompes on emploie des soupapes à double siège, telles que celle que représente la fig. 12, pl. XXVII.

Ces soupapes, qui ont été employées pour la première fois à Londres par Wicksteed, offrent cet avantage qu'elles n'ont besoin d'être soulevées que d'une très faible quantité pour fournir à l'eau des passages très considérables; mais d'un autre côté elles ont l'inconvénient d'exiger un très grand effort intérieur, ponr être détachées de leurs sièges. Pour le démontrer, nous aurons recours à la fig. 15, pl. XXV.

Désignons par A la section de la boite de la soupape, a la section du siège supérieur, $f\ f_1$ les surfaces de contact de la soupape sur les deux sièges, p_1 et p les intensités des pressions extérieures et intérieures. Pour que la soupape puisse être soulevée il faut que la pression intérieure (A — a) p, qui agit de

bas en haut, soit au moins équivalente à la pression extérieure $(A - a + f + f_1)\, p_1$ dirigée en sens contraire.

On a, par conséquent, pour la plus petite valeur de p susceptible de produire l'élévation de la soupape:

$$(A - a)\, p = (A - a + f + f_1)\, p_1$$

Ou

$$p = \frac{A - a + f + f_1}{A - a}\, p_1 = \left(1 + \frac{f + f_1}{A - a}\right) p_1$$

Cette valeur de la pression p est d'autant plus petite que $f f_1$ et a sont eux mêmes plus petits; son minimum correspond donc à l'hypothèse de $a = o$; mais dans ce cas la soupape double devient une soupape simple. Malgré l'inconvénient que nous venons de signaler pour leur élévation, les soupapes à double siège peuvent rendre de grands services et elles ont leur raison d'être dans les installations spéciales analogues à celles où elles ont été employées pour la première fois.

Dans les installations d'eau où on fait usage de soupapes de ce genre, l'élévation de l'eau est due à un poids très considérable qui est soulevé par l'action d'une machine motrice et qui, à un moment donné, est abandonné à lui même et chasse le piston dans le corps de pompe. Si on voulait employer des doubles soupapes dans les pompes dont le piston reçoit son mouvement de la machine motrice, à laquelle il est relié géométriquement, on ne tarderait pas à reconnaitre l'inconvénient de cette disposition, grâce aux chocs violents qui se produiraient au commencement de chacune des courses du piston.

Soupapes à double siège pour machines à vapeur. Dans les grandes machines à vapeur, destinées à l'élévation de l'eau des villes, aussi bien que dans les machines d'épuisement des mines, on fait usage de distributions par soupapes, qui ne sont autre chose que des soupapes à double siège. L'emploi de ces soupapes est dans ce cas très satisfaisant; elles s'ouvrent facilement et pour une faible élévation offrent à la vapeur un très grand passage.

La fig. 1, pl. XXVIII est un tracé géométrique d'une soupape de ce genre.

Soient A la section intérieure du siège du bas, a la section du siège supérieur, f et f_1 les surfaces de contact de la soupape

et des sièges en bas et en haut, p_1 la pression extérieure, p la pression intérieure supposée plus faible, k l'effort qu'il faut exercer verticalement, de bas en haut, sur la tige de la soupape, pour la soulever.

On a, en négligeant le poids de la soupape:

$$K = (A - a + f + f_1)\, p_1 - (A - a)\, p$$

Ou

$$K = (A - a)(p_1 - p) + (f + f_1)\, p_1$$

L'effort K est donc d'autant plus faible que a est plus grand et que f et f_1 sont plus petits.

La disposition représentée fig. 2, pl. XXVIII montre encore mieux la facilité que présente, pour son soulèvement, une soupape double; celle de la figure se compose en réalité de deux soupapes simples, d'inégale grandeur, reliées l'une à l'autre; la plus petite a pour fonction d'équilibrer une partie de la pression qui s'oppose au soulèvement de la plus grande.

Si on désigne par A et a les surfaces intérieures des deux soupapes, $f\ f_1$ les surfaces annulaires de contact (projetées horizontalement), p_1 la pression de la vapeur agissant à l'intérieur, p la pression extérieure, K l'effort nécessaire pour soulever la soupape double, on a:

$$K = (A + f)\, p_1 + (a + f_1)\, p - a\, p_1 - A\, p$$

Ou

$$K = (A - a)(p_1 - p) + f\, p_1 + f_1\, p$$

Soupapes à clapets métalliques. Les soupapes à clapets métalliques, fig. 5 et 6, pl. XXVII, ne sont généralement employées qne pour les pompes, destinées à élever de très grandes quantités d'eau à une faible hauteur. Cet emploi restreint tient à ce qu'en réalité ces soupapes, avec lesquelles il est facile d'obtenir de grands orifices, sont beaucoup moins satisfaisantes au point de vue de la fermeture; il est très difficile d'établir convenablement la charnière et surtout de la maintenir dans un état tel qu'on puisse obtenir une étanchéité convenable ponr une charge d'eau un peu considérable. On fait également usage de clapets métalliques pour les pompes à air des condenseurs de certaines machines à vapeur. Lorsqu'une soupape à clapet doit donner une grande ouverture, il convient de rejeter pour le clapet la forme circulaire ou carrée et d'adopter la forme d'un rectangle

très allongé dont le grand côté soit parallèle à l'axe de rotation du clapet.

Dans cette disposition, le clapet n'a besoin d'être soulevé que d'une très faible quantité, pour offrir un très grand passage.

Soupapes à clapets de cuir. Les soupapes à clapets en cuir (fig. 13, pl. XXVII) sont spécialement employées pour les pompes de puits. Le clapet complet se compose d'une rondelle de cuir, en forme circulaire, renfermée entre quatre demi-disques métalliques. Sur la partie du cuir laissée libre, se trouve une petite plaque métallique, qui est reliée par des boulons à une autre pièce faisant partie du siège de la soupape. Grâce à sa flexibilité, le cuir forme une charnière naturelle à fermeture étanche. L'inconvénient de ces clapets tient à ce que, sous l'action constante de l'humidité, le cuir devient souvent spongieux ou éprouve des modifications chimiques qui obligent à le renouveler assez fréquemment. Depuis quelque temps, à la place du cuir, on fait grand usage du caoutchouc (fig. 14, pl. XXVII).

Robinets.

Dans les conduites d'eau d'un petit diamètre, on fait généralement usage de robinets, pour établir ou intercepter les communications entre les différentes parties.

Les fig. 1 et 2, pl. XXVII représentent un robinet destiné à se raccorder avec deux tuyaux en ligne droite; celui que donnent les fig. 3 et 4 correspond à deux tuyaux dont les axes sont perpendiculaires.

La disposition de ces robinets donne lieu à plusieurs remarques: à l'extrémité du boisseau, c'est-à-dire près des brides, les orifices ont une section circulaire, tandis que dans les parties voisines de la clef et sur la clef elle même, la section est rectangulaire et équivalente d'ailleurs à la précédente. Cette différence de forme des sections tient simplement à ce qu'une section allongée permet de donner au robinet un diamètre notablement plus faible qu'une section circulaire et de le faire, par suite, beaucoup plus léger; comme la matière employée pour la construction des robinets est d'un prix assez élevé, cette réduction de poids a une assez grande importance; elle permet d'ailleurs d'obtenir une forme très satisfaisante au point de vue de l'aspect.

La surface extérieure du boisseau affecte, dans certaines parties, la forme des vides intérieurs, mais dans les autres elle

est déterminée de manière à permettre l'emploi de machines outils. La forme conique adoptée pour la clef a pour but de maintenir cette clef toujours serrée contre le boisseau, malgré l'usure qui se produit avec le temps dans les surfaces en contact. Pour les tuyaux de grands diamètres, on doit rejeter cette disposition de robinets qui serait trop dispendieuse et exigerait un trop grand effort pour sa manœvre.

Clapets à rotation.

Pour les tuyaux d'un grand diamètre, les valves ou clapets à rotation (fig. 3, pl. XXIX) fournissent un mode de fermeture très convenable, surtout lorsqu'il n'est pas indispensable d'avoir une étanchéité parfaite. La disposition représentée sur la figure est relativement très simple, facile à construire et de plus elle n'exige qu'un faible effort pour la mise en mouvement, puisque les résistances à vaincre se réduisent en définitive au frottement des tourillons de l'axe de rotation. Cette propriété des valves de se mouvoir facilement explique leur emploi dans les machines à vapeur pour régler l'arrivée de vapeur; elles sont dans ce cas, commandées par un régulateur de vitesse et elles ont pour but d'empêcher qu'il ne se produise dans le mouvement de la machine des variations de quelque importance.

Tiroirs.

Les tiroirs, lorsqu'ils sont convenablement construits, constituent un des modes de fermeture les plus parfaits qu'on puisse obtenir; on arrive surtout à de bons résultats lorsque le tiroir et sa table ont été dressés en les faisant glisser l'un sur l'autre. Toutefois nous devons faire remarquer que cette solution est relativement compliquée et couteuse et que de plus un tiroir exige, pour son mouvement, des efforts assez considérables lorsqu'il est soumis à de fortes pressions.

La disposition représentée fig. 2, pl. XXIX et dans laquelle le mouvement est donné au tiroir au moyen d'une vis, est une de celles qu'on peut avantageusement employer pour les conduites d'eau. Dans les conduites de gaz, il est préférable de recourir au dispositif de la fig. 1, dans lequel le mouvement est transmis par l'intermédiaire d'une crémaillère et d'un pignon.

Couvercles et boites à étoupes pour cylindres à vapeur et cylindres de pompes.

Dans un cylindre à vapeur ou un cylindre de pompe, le diamètre et la longueur intérieure (prise de couvercle à couvercle) se trouvent déterminés par l'étude même du projet auquel se rapportent ces appareils; nous regarderons donc comme données ces quantités, dont on peut déduire les dimensions des autres parties du cylindre et des couvercles.

De ces dimensions, la plus importante est l'épaisseur δ du cylindre, qu'on peut exprimer en fonction de son diamètre D.

Si on n'avait à tenir compte que de la pression de la vapeur ou de l'eau et de la pression atmosphérique, il suffirait, en général, de donner au cylindre une épaisseur extrêmement faible; mais, en dehors de la question de résistance à la pression, se présente celle de l'étanchéité qui conduit à augmenter notablement cette épaisseur; il importe de plus que le cylindre soit suffisamment rigide, pour ne pas éprouver de déformations sensibles dans le travail du tournage et de l'alésage. Il est bien évident, en effet, que si la pièce est assez faible pour se déformer, lorsqu'on la fixe sur la machine à aléser, la forme cylindrique à section circulaire qu'on obtient par l'action de l'outil, doit plus ou moins disparaître lorsque cette pièce ne se trouve plus maintenue.

On comprend qu'il ne soit pas possible de déterminer d'une manière rationnelle l'épaisseur qu'il convient de donner à un cylindre, pour qu'il soit capable de résister non seulement à la pression de la vapeur, mais encore aux différents efforts dus au travail des machines outils, et pour que, de plus, il présente une étanchéité suffisante, en égard à la porosité plus ou moins grande de la fonte; il est donc indispensable de recourir à l'expérience et d'utiliser, pour la détermination que nous avons en vue, les éléments fournis par l'examen d'un certain nombre d'appareils du même genre.

On se trouve ainsi conduit aux règles empiriques suivantes:

Epaisseur de la paroi du cylindre . . . . . $\delta = 1.5 + \frac{D}{60}$

Nombre des boulons du couvercle . . . . . $= 3 + \frac{D}{7}$

Epaisseur du couvercle . . . . $= \delta$

Diamètre des boulons . . . . $= \delta$

Largeur du rebord du couvercle ou du cylindre . . . . $= 2\,\delta$
Epaisseur du rebord . . . . $= 1{\cdot}33\,\delta$
Distance de l'axe d'un trou de boulon au bord du couvercle . . . . $= 1{\cdot}2\,\delta$

Ces différents rapports se trouvent reproduits fig. 1, pl. XXVI.

Le couvercle se termine ordinairement à l'intérieur par une surface plane, à la condition toutefois que la base du piston soit elle même plane; lorsque cette base, au contraire, présente une certaine courbure, ou qu'elle affecte une forme s'éloignant d'un plan, il convient de donner à la surface du couvercle une forme correspondante, si on regarde comme un espace nuisible le vide existant entre le couvercle et le piston à la fin de la course de ce dernier. Dans une machine à vapeur à simple effet, il ne peut exister d'espace nuisible que du côté où a lieu l'admission de vapeur. Quelquefois les couvercles sont formés d'une double paroi, qui a pour avantage, non seulement, d'augmenter la résistance, mais encore de fournir un espace fermé qu'on peut remplir de vapeur, pour protéger contre le refroidissement et la condensation la vapeur qui travaille dans le cylindre; cette disposition a surtout de l'importance dans les machines à détente. C'est pour un motif analogue que, dans les machines de ce genre, on entoure souvent le cylindre d'un second cylindre concentrique et qu'on fait circuler de la vapeur dans l'espace compris entre la surface extérieure du premier et la surface intérieure du second.

Dans tous les cas, le cylindre à vapeur doit être muni d'une garniture d'étoupes ou de toute autre matière mauvaise conductrice de la chaleur, qu'on recouvre d'une enveloppe en bois ou en tôle.

Les fig. 2 et 6, pl. XXVI représentent des boites à étoupes en bronze pour cylindres de pompes.

Pistons de pompes et de machines à vapeur.

Les conditions auxquelles doivent satisfaire les pistons de pompes et de machines à vapeur sont très multiples et quelques unes sont même assez difficiles à concilier; ces pistons, par exemple, doivent offrir une étanchéité parfaite, tout en ne donnent lieu qu'à de faibles frottements. Toutefois il existe, dans la pratique, certaines dispositions qui réalisent d'une manière satis-

faisante cette double condition; nous allons décrire rapidement celles dont l'emploi est le plus général.

Pour les pompes qui ne doivent pas fonctioner d'une manière continue, mais seulement de temps à autre, on peut très bien recourir à l'emploi de pistons complétement métalliques; c'est en réalité la disposition la plus convenable à adopter pour les pompes à incendie.

Anciennement et surtout pour les pistons de pompes de grandes dimensions, on avait souvent recours à une garniture formée de rondelles de cuir superposées et comprimées entre deux disques métalliques. Ce genre de piston est aujourd'hui complétement abandonné, en raison des nombreux inconvénients qu'il présente; il est d'un prix élevé, ne présente que de faibles garanties d'étanchéité et enfin donne lieu en général à des frottements assez considérables, par suite de l'impossibilité où l'on est de donner rigoureusement aux rondelles de cuir le diamètre qu'elles devraient avoir.

La fig. 9, pl. XXX représente un genre de piston très convenable pour une pompe à double effet; il comprend essentiellement deux cuirs emboutis, serrés entre deux disques métalliques. Le rebord de chaque cuir se trouve appliqué contre les parois du cylindre par la pression même de l'eau et l'étanchéité se trouve ainsi assurée d'une manière très satisfaisante.

La fig. 8 représente un piston à clapet pour une pompe aspirante et élévatoire d'un petit diamètre; la fig. 7 donne un dispositif analogue pour une pompe du même genre, mais plus puissante. Le principe de la construction de ces pistons est identiquement le même que celui des soupapes à clapet en cuir que nous avons précédemment décrites; la seule différence consiste en ce que chaque piston porte en plus sur son pourtour une garniture en cuir, maintenue par un cercle en métal. La partie supérieure de ce cuir se trouve appliquée par la pression de l'eau contre les parois du cylindre et assure par cela même une fermeture hermétique.

La fig. 12 indique un dispositif de piston de petit diamètre avec garniture de chanvre pour une pompe à eau chaude, où l'emploi du cuir doit être forcément rejeté. Cette garniture se compose d'une série de tresses de chanvre graissées. Ces tresses, serrées entre les disques métalliques du piston, se trouvent indirectement pressées contre les parois du cylindre.

La fig. 11 représente un dispositif analogue, muni d'un clapet, qui peut être employé pour les pompes à air de machines à vapeur de faibles dimensions.

L'examen de pistons de pompes de différentes dimensions a conduit à admettre, comme règle empirique, que la hauteur de la garniture d'un piston, ou ce qu'on appelle la hauteur du piston, pouvait être prise égale à $8\left(1 + \frac{D}{100}\right)$, D représentant le diamètre du piston exprimé en centimètres.

La fig. 4 donne un dispositif de piston pour machines soufflantes. La garniture se compose, comme dans les pistons de pompes à eau, de deux rondelles de cuir embouties, disposées en sens inverse.

La fig. 2 indique une garniture de presse-étoupes pour piston plongeur.

La fig. 5 représente un piston à garniture en chanvre pour machine à vapeur. Ici encore, comme précédemment, la garniture se compose de tresses de chanvre superposées, qui se trouvent serrées les unes contre les autres par l'action d'un disque métallique formant couvercle du piston et sont ainsi indirectement appliquées contre les parois du cylindre. Les pistons de ce genre ont l'avantage de ne pas rayer le cylindre, mais ils présentent par contre de nombreux inconvénients. Un des plus graves consiste en ce que le degré d'étanchéité ne reste pas constant, par suite de l'usure du chanvre et des variations que subit son élasticité, et qu'au bout d'un temps relativement assez court, il devient indispensable de renouveler complétement la garniture.

Pour les machines à basse pression des bateaux, les pistons de ce genre sont assez convenables et ce sont le plus souvent ceux qu'on emploie, mais pour les machines à haute pression, ils ne présentent pas des garanties suffisantes d'étanchéïté.

Pour ces dernières machines on préfère généralement recourir à l'emploi des garnitures métalliques. Ces garnitures sont de différentes sortes; elles peuvent se composer d'anneaux élastiques ou d'une série de segments métalliques, pressés par des ressorts contre les parois du cylindre.

La fig. 1 représente un piston à anneaux. Ces derniers sont ordinairement en fonte, mais on les fait quelquefois en fer forgé, en métal de canon ou même en alliage d'une composition différente. Il est difficile de décider quel est le meilleur métal à employer pour cet usage; la supériorité de l'un sur les autres

est probablement trop peu accentuée, pour pouvoir être constatée par expérience. On n'est pas d'avantage fixé sur la forme qu'il convient de donner aux anneaux. Tantôt on leur donne partout la même épaisseur dans le sens du rayon, tantôt, au contraire, on les renforce aux points où ils sont entaillés (aux extrémités d'un diamètre). Il est assez probable que ces deux dispositions sont sensiblement équivalentes et comme l'uniformité d'épaisseur est d'une construction plus simple, il convient de l'adopter de préférence. Pour maintenir les anneaux pressés contre les parois du cylindre, on a eu recours pendant longtemps, à des ressorts intérieurs, dont la disposition était d'ailleurs très variable; aujourd'hui on a à peu près complétement renoncé à l'emploi de ces ressorts, l'élasticité propre des anneaux étant en général suffisante pour les appliquer convenablement contre les parois. Il est d'une importance capitale d'apporter le plus grand soin à la confection des anneaux et à la préparation des surfaces intérieures avec lesquelles ils doivent se trouver en contact.

Les anneaux doivent pouvoir jouer librement l'un sur l'autre, ainsi que sur les surfaces intérieures des disques du piston. Il en résulte que la distance entre ces disques doit être légèrement supérieure à la hauteur totale des deux anneaux, et que, par suite, comme il est facile de le comprendre, l'intérieur du piston est en communication constante avec la partie du cylindre vers laquelle il se dirige. En effet le corps du piston commence d'abord à se mouvoir et entraîner avec lui les anneaux; il se produit donc, dans l'intérieur du piston une pression plus faible que celle de la vapeur qui le fait mouvoir. On a également construit des pistons dans lesquels l'effet contraire se produit, c'est-à-dire dans lesquels l'intérieur est en communication constante avec la partie du cylindre où règne la plus forte pression, mais cette disposition a probablement l'inconvénient de donner lieu à des frottements considérables.

Pour les pistons à anneaux et plus encore pour les pistons à segments, on a expérimenté, avec le plus grand soin, un nombre infini de dispositions et de systèmes de ressorts; mais tous ces essais ne me paraissent avoir aucune valeur pratique et je pense que, surtout pour les machines d'une certaine puissance, il y a lieu de renoncer complétement aux pistons à segments et de se borner exclusivement à l'emploi des pistons à anneaux simples.

Dans les machines à vapeur horizontales, il y a encore d'autres motifs pour n'employer que les pistons à anneaux; on

comprend, en effet, que dans les machines de cette espèce, les segments sont bien plus exposés à se déplacer. Dans les machines locomotives, les machines marines et les petites machines de fabriques, les cylindres sont généralement horizontaux.

Au point de vue de l'étanchéité et de l'usure du cylindre. un des points les plus importants à considérer est la hauteur totale h, mesurée parallélement à l'axe du cylindre, des anneaux ou des couches de segments. Pour que le piston soit suffisamment étanche, il est indispensable que la pression totale exercée par la garniture sur les parois du cylindre ait une certaine valeur. On peut d'ailleurs rendre la pression par centimètre carré assez faible, pour ne pas exposer le cylindre à une usure trop rapide, en donnant une valeur suffisante à la hauteur h de la garniture. A ce point de vue, une garniture douce d'une assez grande hauteur est préférable à une garniture serrée d'une faible épaisseur.

L'examen d'un grand nombre de pistons appartenant à des machines de toutes dimensions, d'une bonne construction, conduit à admettre la règle empirique suivante: la hauteur h d'une garniture métallique doit être prise égale à $4\left(1+\frac{D}{100}\right)$ et celle d'une garniture de chanvre à $8\left(1+\frac{D}{100}\right)$, D représentant le diamètre du cylindre en centimètres.

TROISIÈME SECTION.

Calcul des résistances.

Frottement. Raideur des cordes et des chaines. Résistance au roulement.

Frottement.

Frottement d'un corps sur un plan incliné. Un corps étant placé sur un plan incliné, cherchons à déterminer, en tenant compte du frottement, l'effort qu'il convient d'exercer sur ce corps pour le faire glisser le long du plan.

Soient (fig. 4, pl. XXVIII) Q le poids du corps, α l'inclinaison du plan sur l'horizontale, P la force nécessaire pour faire glisser le corps sur ce plan, β l'angle que fait la direction de cette force avec celle du plan incliné, f le coefficient de frottement.

Cela posé, la pression normale du corps sur le plan a pour expression $Q \cos \alpha - P \sin \beta$, et par suite $f (Q \cos \alpha - P \sin \beta)$ représente la résistance due au frottement. Comme d'ailleurs $P \cos \beta$ et $Q \sin \alpha$ sont les composantes des forces P et Q parallèlement au plan incliné, il faut, pour que le corps puisse se mouvoir, que $P \cos \beta$ soit équivalent à $Q \sin \alpha$ augmenté de la résistance due au frottement; on doit donc avoir:

$$P \cos \beta = Q \sin \alpha + f (Q \cos \alpha - P \sin \beta)$$

D'où l'on déduit:

$$P = Q \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\beta + f\sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si on veut connaitre la force P_1, qu'il faudrait substituer à P, pour empêcher le glissement du corps de se produire, il suffit de remplacer dans l'expression (1) P par P_1 et f par $-f$. On trouve alors:

$$P_1 = Q \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\beta - f\sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si les forces P et Q agissent toutes les deux suivant une direction horizontale, $\beta = -\alpha$, et on a:

$$\left.\begin{aligned} P &= Q \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = Q \frac{\text{tg.}\,\alpha + f}{1 - f\,\text{tg.}\,\alpha} \\ P_1 &= Q \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = Q \frac{\text{tg.}\,\alpha - f}{1 + f\,\text{tg.}\,\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

La force P_1 devient nulle, c'est-à-dire que le corps abandonné à lui même cesse de glisser, quand on a:

$$\text{tg.}\,\alpha = f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

La force P devient infinie, quand

$$\text{tg.}\,\alpha = \frac{1}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Tête de piston et glissières. La pression de la tête d'un piston sur les glissières varie suivant la position de la manivelle.

Désignons par P (fig. 5, pl. XXVIII) la pression exercée sur le piston, r le rayon de la manivelle, α l'angle que cette manivelle fait, à un moment donné, avec la tige du piston, l la longueur de la bielle, β l'angle variable de cette bielle avec la tige du piston, N la pression variable de la tête du piston sur la glissière, S la résistance sur la bielle, f le coefficient de frottement. Cela posé, la force P a à vaincre, non seulement la résistance $S\cos\beta$, mais encore le frottement fN; on a donc:

$$S\cos\beta + fN = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

On a d'ailleurs:

$$S\sin\beta = N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

D'où on tire, par l'élimination de S:

$$N = P \frac{\sin \beta}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

La résistance due au frottement a donc pour valeur:

$$N f = P f \frac{\sin \beta}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ce frottement est variable avec β et on peut se proposer de trouver sa valeur moyenne depuis $\beta = o$ jusqu'à la valeur de β donnée par la relation $\tan g\, \beta = \frac{r}{l}$, c'est-à-dire pour une rotation de la manivelle de 90° environ.

En désignant par F_m cette valeur moyenne et en posant $\frac{r}{l} = \gamma$, on a:

$$F_m = \frac{1}{\gamma} \int_o^\gamma N f\, d\beta$$

Ou, en remplaçant $N f$ par sa valeur tirée de la relation (4):

$$F_m = \frac{P f}{\gamma} \int_o^\gamma \frac{\sin \beta\, d\beta}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

L'intégration rigoureuse du second membre de cette équation conduirait à une expression très compliquée; mais pour le but que nous nous proposons, nous pouvons nous contenter d'une approximation à laquelle on arrive en admettant que, dans toutes les machines, γ a une valeur très petite. Nous poserons donc:

$$\cos \beta = 1, \quad \sin \beta = \beta$$

Ce qui donne:

$$F_m = \frac{P f}{\gamma} \int_o^\gamma \frac{\beta\, d\beta}{1 + f \beta}$$

Mais:

$$\frac{\beta}{1 + f \beta} = \frac{1}{f} \left(1 - \frac{1}{1 + f \beta}\right)$$

Par conséquent on peut écrire:

$$F_m = \frac{P}{\gamma} \int_o^\gamma \left(1 - \frac{1}{1 + f \beta}\right) d\beta$$

L'intégration donne:

$$F_m = \frac{P}{\gamma}\left[\gamma - \frac{1}{f}\,\text{log. nat.}\,(1 + f\gamma)\right]$$

Ou:

$$F_m = P\left[1 - \frac{1}{f\gamma}\,\text{log. nat.}\,(1 + f\gamma)\right]$$

Comme le produit $f\gamma$ est toujours très petit par rapport à l'unité, on ne commet pas d'erreur sensible en posant:

$$\text{log. nat.}\,(1 + f\gamma) = f\gamma - \frac{1}{2} f^2\gamma^2$$

ce qui conduit à:

$$F_m = \frac{1}{2} P f\gamma = \frac{1}{2} P f \frac{r}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Si l'on désigne par v la vitesse moyenne du piston et par e le travail nécessaire pour vaincre le frottement, on a $e = v\,F_m$ et par suite:

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{1}{2} P f \frac{r\,v}{l} = P\,v\,\frac{1}{2}\,\frac{r}{l} f \\ \frac{e}{P\,v} &= \frac{1}{2}\,\frac{r}{l} f \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

La seconde expression donne le rapport entre le travail absorbé par le frottement des glissières et le travail moteur agissant sur le piston. Ce rapport est d'ailleurs toujours relativement faible. Ainsi, dans les locomotives, $\frac{r}{l} = \frac{1}{6}$, $f = \frac{1}{10}$, par conséquent:

$$\frac{e}{P\,v} = \frac{1}{120} = 0{\cdot}008$$

Dans ce cas, la perte de travail n'atteint pas 1%. Mais, en dehors de cette perte de travail assez peu importante, le frottement qui s'exerce sur les glissières a malheureusement pour résultat de les creuser; la pression N est, en effet, à peu près nulle au commencement et à la fin de la course du piston, tandis qu'elle atteint la valeur $P\frac{r}{l}$ au milieu de cette course.

Nous devons encore faire remarquer que la tête du piston n'exerce de pression que sur l'une des glissières, tant que le sens

de rotation de la manivelle reste le même. Dans la marche avant, la pression a lieu constamment sur la glissière supérieure; c'est donc celle qui est exposée à l'usure la plus rapide et qu'il importe, pour ce motif, de graisser avec le plus grand soin. Ce graissage devrait d'ailleurs toujours s'effectuer, au moyen de la tête même du piston, munie d'un graisseur.

Frottement des pistons. Pour qu'une garniture de piston forme un joint étanche, tout en ne donnant pas lieu à la production de frottements inutiles, il convient, comme nous l'avons dit précédemment, qu'elle ait une certaine hauteur et qu'elle soit appliquée contre les parois du cylindre avec une certaine intensité.

Si l'on désigne par D le diamètre du piston, h la hauteur de la garniture, mesurée parallèlement à l'axe, y l'intensité de la pression, c'est-à-dire la force qui agit sur chaque centimètre carré de la surface de la garniture pour l'appliquer contre la paroi du cylindre, p la différence des pressions par centimètre carré sur les deux faces du piston, f le coefficient de frottement, on a, pour expression du frottement du piston:

$$\pi \, D \, h \, y \, f$$

D'un autre côté, la force qui pousse le piston est $\frac{\pi D^2}{4} p$. Le rapport de la résistance du frottement à la force motrice est donc:

$$\frac{\pi \, D \, h \, y \, f}{\frac{1}{4} \pi \, D^2 \, p} = \frac{4}{D} \, \frac{h \, y}{p} f$$

L'expérience semble indiquer que le terme $\frac{h\,y}{p}$ a une valeur très sensiblement constante. Sous la réserve de cette hypothèse, on voit que la perte relative de force due au frottement du piston est proportionnelle au coefficient de frottement et à l'inverse du diamètre du piston.

Il suit de là que les petits pistons font perdre relativement plus de force que les grands et à ce point de vue les pompes et les machines à vapeur de grandes dimensions sont préférables aux petites. Malheureusement nous ne possédons pas d'expériences précises qui permettent de déterminer la valeur numérique du terme $\frac{4\,h\,y\,f}{p}$ pour les différents dispositifs de pistons employés; dès lors il ne nous est pas possible de calculer exacte-

ment le frottement d'un piston. Ajoutons toutefois qu'au point de vue pratique, ce n'est là qu'un très faible inconvénient, car nous connaissons les différentes conditions à remplir pour diminuer le frottement et un calcul exact ne nous fournirait aucune indication nouvelle sur les dispositions à adopter dans la construction des pistons.

Frottements des tourillons.

Tourillons cylindriques à mouvement de rotation continu. Désignons par P la pression exercée par le tourillon sur son coussinet, f le coefficient de frottement, v la vitesse à la circonférence du tourillon, cette vitesse étant exprimée en mètres par seconde, d le diamètre du tourillon en centimètres, n le nombre de tours par minute; Pf représente le frottement à la circonférence et Pfv le travail, en kilogrammètres, absorbé par le frottement. Comme on a $v = \frac{d \cdot \pi \cdot n}{100 \times 60}$, ce travail peut encore être exprimé par:

$$e = \frac{n\, d\, P\, f}{1910} \text{ kilogrammèt.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

En général, la perte de travail due au frottement des tourillons ne représente qu'une très minime fraction du travail total que l'arbre transmet. D'un autre côté l'usure, se produisant circulairement sur toute la surface et n'amenant pas de déformation des pièces, n'a pas d'importance. La seule chose à craindre pour les tourillons animés d'une très grande vitesse, c'est l'échauffement. Aussi doit-on, autant que possible, donner à ces tourillons un assez fort diamètre et une assez grande longueur. On doit également apporter le plus grand soin à ce que chaque tourillon porte bien exactement sur toute la longueur du coussinet.

Frottement des crapaudines. En admettant que la pression exercée par un axe vertical sur sa crapaudine soit répartie uniformément sur tous les points de sa base, le frottement peut se calculer de la manière suivante. Soient P_1 la pression exercée par le pivot sur la crapaudine, d le diamètre en centimètres de ce pivot, n le nombre de tours par minute, $\frac{P_1}{\pi \frac{d^2}{4}}$ représente la pression exercée sur la crapaudine par chaque centimètre carré

de la section inférieure du pivot. Si l'on imagine, sur la surface de contact, deux cercles concentriques de rayons x et $x + \delta x$, la surface annulaire, comprise entre ces deux cercles, exerce sur la crapaudine une pression représentée par:

$$2 \pi x \delta x \times \frac{P_1}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{8 P_1}{d^2} x \delta x$$

et le frottement correspondant est, par suite:

$$\frac{8 P_1}{d^2} f x \delta x$$

Le moment de la résultante de tous les frottements partiels sur la crapaudine, est alors:

$$\frac{8 P_1}{d^2} f \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 \delta x = \frac{1}{3} P_1 f d$$

La force qui doit agir à la circonférence extérieure du pivot pour faire équilibre à tous ces frottements a donc pour valeur:

$$\frac{1}{3} \frac{P_1 f d}{\frac{d}{2}} = \frac{2}{3} P_1 f$$

Le travail absorbé par le frottement a pour expression:

$$e_1 = \frac{2}{3} \frac{n d P_1 f}{1910}$$

Si l'axe vertical est muni d'un coussinet sur lequel il exerce une pression P, pendant qu'il exerce sur la crapaudine une pression P_1, le travail total absorbé par le frottement du coussinet et celui de la crapaudine, sera:

$$e_2 = \frac{n d f}{1910} \left(P + \frac{2}{3} P_1\right)$$

Frottement des tourillons à mouvement alternatif. Lorsqu'un tourillon, au lieu d'être animé d'un mouvement de rotation continu, doit seulement tourner, alternativement dans un sens et dans l'autre, d'un certain angle α, la résistance due au frottement n'est évidemment qu'une fraction de celle qui correspondrait à

une rotation continue, fraction représentée par $\frac{2\alpha}{360}$; on a donc dans ce cas:

$$e = \frac{n\,d\,P\,f}{1910}\,\frac{2\,\alpha}{360}$$

formule dans laquelle n exprime le nombre d'oscillations du tourillon par minute, en comptant pour une oscillation le mouvement dans les deux sens.

Cette perte de travail n'a qu'une très faible importance quand $2\,\alpha$ est petit par rapport à 360°; c'est ce qui arrive, par exemple, pour les tourillons de balanciers des machines à vapeur. Mais le mode de mouvement lui-même offre de grande inconvénients pour les tourillons qui s'ovalisent rapidement, l'usure ne se produisant que sur une fraction de leur surface.

Frottement d'un pivot terminé par une surface de révolution. Supposons qu'un pivot soit terminé par une surface de revolution, ainsi que la crapaudine, dans laquelle il doit tourner, (fig. 6, pl. XXVIII). Soit Q la pression exercée verticalement par l'arbre sur cette crapaudine.

Prenons un point quelconque O, comme origine d'un système de coordonnées, l'axe géométrique du pivot représentant l'axe des x. Soient $o\,p = x$, $m\,p = y$, les coordonnées d'un point quelconque m de la section méridienne de la surface de révolution, $o\,p_1 = x + d\,x$, $m_1\,p_1 = y + d\,y$, les coordonnées d'un point infinimement voisin; désignons par $d\,s$ la longueur d'arc $m\,m_1$. Si l'on représente par N la pression par unité de surface s'exerçant normalement en chaque point de la portion de surface de révolution, comprise entre les plans $m\,p$ et $m_1\,p_1$, la résultante de toutes les pressions particlles, qui tendent à soulever le pivot, sera pour cette zône, $2\,\pi\,y\,d\,s\,N\,\sin\varphi$, φ désignant l'angle que la tangente à la courbe au point m fait avec l'axe du pivot.

La résultante totale de toutes les pressions normales sera donc, suivant la verticale, $\int_{r_0}^{r} 2\,\pi\,y\,d\,s\,N\,\sin\varphi$ et on aura par suite la relation:

$$\int_{r_0}^{r} 2\,\pi\,y\,d\,s\,.\,N\,\sin\varphi = Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

r_0 et r représentant les rayons $B B_1$ et $A A_1$; comme d'ailleurs $\sin \varphi = \frac{d y}{d s}$, on a:

$$Q = 2 \pi \int_{r_0}^{r} y N d y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Si on désigne par ω la vitesse angulaire de rotation de l'axe, ωy est la vitesse qui doit entrer dans l'évaluation du travail du frottement dû à la pression normale $2 \pi y d s N$. Le travail e, correspondant au frottement, est donc:

$$e = \int_{r_0}^{r} 2 \pi y d s f y \omega = \omega 2 \pi f \int_{r_0}^{r} y^2 N d s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

La pression normale N est en général variable et dépend de la forme de la surface; il est facile de la calculer, dans chaque cas, en s'appuyant sur des considérations de statique.

Supposons d'abord que le pivot soit placé sur la crapaudine de telle manière qu'il y ait simplement contact géométrique sans pression. Si on vient ensuite faire agir la force Q, il se produit entre les surfaces de contact des pressions normales qui vont en croissant jusqu'à ce qu'elles fassent équilibre à la force Q. Dans ces conditions, la surface du pivot et celle de la crapaudine se déforment, mais en restant toujours superposables. Il est évident que les mêmes effets se produiront si nous supposons les deux pièces soumises à des pressions normales égales à celles qui se développent quand la force Q applique le pivot sur la crapaudine. Les pressions normales sur le pivot le font passer de la forme A B à la forme C D (fig. 7, pl. XXVIII) et de même la crapaudine passe de la forme A C à la forme E F. Les deux courbes C D et E F doivent nécessairement concorder si la distance s t des points de section déterminés par une verticale quelconque m s t a une grandeur constante, car il suffira dans ce cas d'abaisser verticalement de cette longueur constante s t la surface déformée C D du pivot pour qu'elle vienne coïncider avec celle de la crapaudine E F.

Si nous menons au point m la normale n m q u, mq et m n représentent les compressions du pivot et de la crapaudine sous l'action de la pression normale N; on doit donc poser $m q = \varepsilon N$,

$mn = \varepsilon_1 N_1$, ε et ε_1 désignant des constantes qui dépendent de l'élasticité de la matière dont est formée chaque pièce.

Comme les compressions sont très petites, on peut considérer msq et mnt comme des triangles rectilignes infiniment petits; on a alors:

$$mq = ms \sin \varphi, \quad mn = mt \sin \varphi$$

Ou

$$mq + mn = \sin \varphi \, (ms + mt)$$

Si l'on remplace mq et mn par leurs valeurs et que l'on désigne par λ la longueur $ms + mt = st$, constante par hypothèse, on obtient:

$$\varepsilon N + \varepsilon_1 N = \lambda \sin \varphi$$

d'où on tire:

$$N = \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

expression qui permet de calculer la pression normale N. En portant cette valeur de N dans les équations (2) et (3) on trouve:

$$Q = 2\pi \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi \, y \, dy = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \sin \varphi \, dy$$

$$e = 2\pi f \omega \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi \, y^2 \, ds = 2\pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \sin \varphi \, ds$$

Ou, comme $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$:

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \frac{dy}{ds} \, dy \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

$$e = 2\pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y^2 \, dy \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

Et comme $\int_{r_0}^{r} y^2 \, dy = \frac{1}{3}(r^3 - r_0^3)$, on a encore:

$$e = \frac{2}{3} \pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \left(r^3 - r_0^3 \right) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

En divisant membre à membre les équations (7) et (5) on arrive à:

$$\frac{e}{Q} = \frac{1}{3} f \omega \frac{r^3 - r_0^3}{\int_{r_0}^{r} y \frac{d y}{d s} d y} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Applications. Proposons-nous d'appliquer les formules précédentes à quelques formes particulières de pivots.

Pour un pivot terminé par une surface plane circulaire, on a $r_0 = o$, $d s = d y$; par suite, en vertu de l'équation (5):

$$Q = 2 \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{o}^{r} y \, d y = \pi r^2 \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1}$$

$$\lambda = (\varepsilon + \varepsilon_1) \frac{Q}{\pi r^2} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

D'un autre côté les relations (4) et (8) donnent:

$$N = \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin 90^0 = \frac{Q}{\pi r^2} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$\frac{e}{Q} = \frac{2}{3} f \omega r \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Pour un pivot conique (fig. 8, pl. XXVIII), on a $r_0 = o$, $d s \sin \beta = d y$, $\sin \varphi = \sin \beta$. On trouve alors:

$$Q = 2 \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{o}^{r} y \sin \beta \, d y$$

$$Q = \pi r^2 \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \beta \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$N = \frac{Q}{\pi r^2} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

$$\frac{e}{Q} = \frac{2}{3} f \omega \frac{r}{\sin \beta} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Pour un pivot de forme sphérique, on doit, en tenant compte des données de la fig. 9, pl. XXVIII, poser:

$$x = r(1 - \cos\psi),\ y = r\sin\psi,\ ds = r\,d\psi,\ r_0 = o$$

ce qui donne:

$$dx = r\sin\psi\,d\psi,\ dy = r\cos\psi\,d\psi$$

et, par conséquent:

$$Q = 2\pi\frac{\lambda}{\epsilon + \epsilon_1}\int_o^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\psi\cos^2\psi\,d\psi$$

$$Q = \frac{2}{3}\pi\frac{\lambda}{\epsilon + \epsilon_1} r^2 \quad \text{. . . . . (15)}$$

$$\frac{c}{Q} = f\omega r \quad \text{. . . . . (16)}$$

$$N = \frac{3}{2}\frac{Q}{\pi r^2}\cos\psi \quad \text{. . . . . (17)}$$

Forme de pivot correspondant au minimum d'échauffement. Proposons-nous de déterminer la forme d'un pivot de telle sorte qu'en chaque point de la surface de contact de ce pivot et de sa crapaudine l'échauffement dû au frottement ait une valeur constante et aussi faible que possible. Il est évident que l'emploi d'un pivot satisfaisant à cette condition donnera les meilleurs résultats au point de vue de l'usure et des grippements.

L'échauffement qui se produit en un point déterminé de la surface d'un pivot, par suite du frottement, doit évidemment se calculer d'après le travail absorbé par ce frottement pour l'unité de surface. Notre problème revient donc à trouver, pour la courbe du pivot, une forme telle que ce travail soit constant en tous les points.

Or, si nous prenons une portion de la surface correspondant au rayon y (fig. 6), $N f$ est la résistance due au frottement par unité de surface et ωy la vitesse de déplacement de son point d'application. Nous avons donc à poser:

$$N f \omega y = \text{const.} = k \quad \text{. . . . . (18)}$$

le coefficient k devant être déterminé par l'expérience.

En remplaçant N par sa valeur tirée de l'équation (4), nous obtenons :

$$\frac{\lambda}{\epsilon + \epsilon_1}\sin\varphi\, f\omega y = k$$

Ou

$$y \sin \varphi = \frac{k(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda f \omega}$$

Le produit $y \sin \varphi$ doit donc, pour chaque point de la surface du pivot, avoir une seule et même valeur; en désignant par α la valeur de φ correspondant au plus grand rayon $y = r$, nous aurons:

$$y \sin \varphi = r \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\frac{k(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda f \omega} = r \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

L'équation (19) détermine la forme du pivot; on a, en effet, $\sin \varphi = \frac{d y}{d s}$ et, en introduisant cette valeur dans la formule (19):

$$y \, d y = r \sin \alpha \, d s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

L'intégration donne:

$$\frac{1}{2} y^2 = r s \sin \alpha + \text{const.}$$

En prenant pour origine de coordonnées le point B_1 (fig. 6), on a $s = o$ pour $y = r_0$, par suite:

$$\frac{1}{2} r_0^2 = 0 + \text{const.}$$

ce qui conduit à la relation:

$$\frac{1}{2} (y^2 - r_0^2) = r s \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

La courbe que doit affecter la section méridienne du pivot se trouve ainsi exprimée en fonction de y et de s. Pour obtenir son équation en coordonnées rectangulaires, remarquons qu'on a $d s = d y \sqrt{1 + \left(\frac{d x}{d y}\right)^2}$. En portant cette valeur $d s$ dans l'équation (21), on arrive à l'expression:

$$d x = d y \sqrt{\left(\frac{y}{r \sin \alpha}\right)^2 - 1}$$

dont l'intégrale est:

$$x = +\frac{1}{2}\,y\sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha}-1}-\frac{r\sin\alpha}{2}\,\text{log. nat.}\left(\frac{y}{r\sin\alpha}+\sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha}-1}\right) + \text{const.}$$

y ne peut pas être plus petit que $r\sin\alpha$, car le terme $\sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha}-1}$ deviendrait imaginaire; le plus petit rayon qu'on puisse admettre pour le pivot est donc:

$$r_0 = r\sin\alpha$$

pour $y = r_0 = r\sin\alpha$, on a $x = o$, la constante de l'intégration est donc nulle et l'équation de la courbe devient:

$$x = \frac{1}{2}\,y\sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha}-1}-\frac{r\sin\alpha}{2}\,\text{log. nat.}\left(\frac{y}{r\sin\alpha}+\sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha}-1}\right) \quad (23)$$

Le plus grand rayon est $y = r$. Si on désigne par h la hauteur du pivot $A_1\,B_1$ (fig. 6) on doit avoir $x = h$ pour $y = r$ et, par conséquent:

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{2}\,\text{log. nat.}\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \quad . \; . \; . \quad (24)$$

relation qui exprime le rapport de la hauteur du pivot à son plus grand rayon. Calculons maintenant les valeurs de Q et de e.

Les équations (19) et (20) donnent:

$$Q = 2\pi\,\frac{\lambda}{\varepsilon+\varepsilon_1}\int_{r_0}^{r}\frac{k(\varepsilon+\varepsilon_1)}{\lambda f\omega}\,d\,y = 2\pi\,\frac{k}{f\omega}(r-r_0)$$

ou, comme $r_0 = r\sin\alpha$:

$$Q = 2\pi\,\frac{k}{f\omega}(1-\sin\alpha)\,r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

On en déduit, pour le rayon du pivot:

$$r = \frac{f\omega}{2\pi k}\,\frac{Q}{(1-\sin\alpha)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Si l'on remplace dans l'équation (7) $\frac{\lambda}{\varepsilon+\varepsilon_1}$ par sa valeur tirée de la relation (20), on trouve:

$$e = \frac{2}{3}\,\pi k r^2\,\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

ou enfin, en éliminant r au moyen de l'équation (26):

$$e = \frac{1}{6\pi} \frac{1}{k} f^2 \omega^2 Q^2 \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Quant au rapport $\frac{e}{Q}$ il devient dans ce cas:

$$\frac{e}{Q} = \frac{1}{3} f \omega r \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Pour trouver une valeur convenable de la constante k, nous pouvons partir de ce fait d'expérience que, pour un pivot ordinaire, cylindrique à base circulaire, un diamètre de 12 centimètres est suffisant pour une pression de 20 kilogrammes par centimètre carré de la base et une vitesse de rotation de l'arbre de 150 tours par minute. Si donc nous posons, pour un semblable tourillon:

$$\frac{Q}{\pi r^2} f \omega r = k$$

en prenant:

$$\frac{Q}{\pi r^2} = 20, \; f = 0{\cdot}08, \; \omega = \frac{2\pi \times 150}{60} = 15{\cdot}7, \; r = 6 \text{ centimètres}$$

nous obtiendrons:

$$k = 20 \times 0{\cdot}08 \times 15{\cdot}7 \times 6 = 154 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Quelque exemples numériques vont nous permettre de montrer ce qu'on peut obtenir de pivots de cette espèce.

En faisant dans les formules $k = 154$, $f = 0{\cdot}054$ (graissage continu fait avec soin), $\pi = 3{\cdot}142$, nous trouvons:

pour	$\alpha = 20^0$	30^0	40^0
d'après l'équation (26) $\frac{r}{Q\,\omega} =$	$\frac{1}{11844}$	$\frac{1}{9000}$	$\frac{1}{6426}$
d'après l'équation (28) $\frac{e}{Q^2\,\omega^2} =$	$\frac{1}{154700}$	$\frac{1}{142860}$	$\frac{1}{111111}$

ou, en remplaçant la vitesse angulaire, exprimée en centimètres, par le nombre de tours n de l'arbre par minute $\left(\omega = \frac{2\pi}{60} n\right)$:

$$\frac{r}{Q\,n} = \frac{1}{113086} \qquad \frac{1}{85732} \qquad \frac{1}{61355}$$

$$\frac{e}{Q^2\,n^2} = \frac{1}{14077700} \qquad \frac{1}{13000260} \qquad \frac{1}{10111101}$$

On a également, pour les mêmes valeurs de α:

$$\frac{e}{r^2} = \quad 906 \qquad 567 \qquad 372$$

En désignant par e_1 le travail du frottement dans un pivot ordinaire à base circulaire plane, on a:

$$e_1 = \frac{2}{3}\,Q\,f\,r\,\omega$$

Cette formule, combinée avec l'équation (29), donne:

$$\frac{e_1}{e} = \frac{2}{\dfrac{1 - \sin^3\alpha}{\sin\alpha\,(1 - \sin\alpha)}}$$

et l'on trouve:

$$\text{pour} \quad \alpha = 20^0 \qquad 30^0 \qquad 40^0$$

$$\frac{e_1}{e} = \frac{1}{2{\cdot}13} \qquad \frac{1}{1{\cdot}75} \qquad \frac{1}{1{\cdot}61}$$

On voit qu'au point de vue du travail absorbé par le frottement, la forme de tourillon, à laquelle nous a conduit le calcul, n'est pas à recommander. Quant à la question de savoir si cette forme est réellement efficace contre l'échauffement, elle ne peut guère être résolue que par l'expérience, toute notre théorie reposant sur deux hypothèses dont l'exactitude peut à la rigueur être contestée.

Pivot antifriction Les pivots qu'on désigne sous ce nom sont une invention de Schiele. Dans ce système, la courbe méridienne du pivot est déterminée par cette condition que la longueur de la tangente $m\,p$ (fig. 10, pl. XXVIII) reste constante pour chaque point de la courbe. Si on désigne cette longueur par t, on a $t \sin\varphi = y$; comme on a aussi $\sin\varphi = \frac{d\,y}{d\,s}$, il en résulte la relation:

$$t\,\frac{d\,y}{d\,s} = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

qui est l'équation différentielle de la courbe; en l'intégrant, on obtient:

$$t \log. y = s + \text{const.}$$

En désignant par r_o le plus petit rayon et en comptant les longueurs d'arcs à partir du point de la courbe correspondant à ce rayon, on a $y = r_o$ pour $s = o$, d'où:

$$t \log. r_0 = o + \text{const.}$$

Par suite:

$$t \log. \frac{y}{r_0} = s \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

$$\frac{y}{r_0} = e^{\frac{s}{t}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Si on veut avoir l'équation de la courbe en fonction de x et y, il suffit de remarquer qu'en vertu de la relation $d\,s = d\,y \sqrt{1 + \left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^2}$, on a:

$$\frac{t}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^2}} = y \quad \text{ou} \quad \frac{d\,x}{d\,y} = \frac{\sqrt{t^2 - y^2}}{y}$$

expression dont l'intégrale est:

$$y = \sqrt{t^2 - y^2} + \frac{1}{2}\, t \log. \text{nat.} \frac{\sqrt{t^2 - y^2} - t}{\sqrt{t^2 - y^2} + t} + \text{const.}$$

On arrive à cette courbe, si, au lieu de prendre la pression normale comme nous l'avions trouvée d'abord, proportionnelle au sinus de l'angle φ, on la suppose inversement proportionnelle à ce même sinus, c'est-à-dire si on pose:

$$N = \frac{\gamma}{\sin \varphi} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

γ représentant une constante, et si, en outre, on prend comme précédemment:

$$N\, f\, \omega\, y = k \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

On arrive, en effet, dans ce cas aux relations:

$$\frac{\gamma}{\sin \varphi} f\, \omega\, y = k \quad \text{et} \quad \frac{y}{\sin \varphi} = \frac{k}{\gamma\, f\, \omega}$$



Seulement, comme $\frac{\gamma}{\sin \varphi} = \iota$, il en résulte d'après les hypothèses (1) et (2) que l'on doit avoir $\iota = \frac{k}{\gamma f \omega}$, c'est-à-dire que ι doit être une grandeur constante. Nous devons toutefois faire remarquer que l'hypothèse $N = \frac{\gamma}{\sin \varphi}$ est évidemment fausse et que, par suite, l'idée de Schiele reposant sur une erreur, sa solution doit être rejetée.

Tourillons de manivelles et excentriques. La formule que nous avons trouvée pour le travail du frottement à la circonférence d'un tourillon animé d'un mouvement de rotation continu:

$$e = \frac{n\, d\, f\, P}{1910}$$

est également applicable aux tourillons de manivelles et aux excentriques, à la seule condition que d, exprimé en centimètres, représente, dans le premier cas, le diamètre d'un tourillon de manivelle et, dans le second, le diamètre d'un plateau d'excentrique. On en conclut immédiatement que la perte de travail par les excentriques doit être très considérable, leurs diamètres étant toujours très grands. Aussi doit-on éviter de les employer toutes les fois qu'il s'agit de transmettre des forces un peu considérables; c'est là une règle dont on ne s'écarte en réalité jamais dans la pratique.

Frottement des anneaux. Les surfaces annulaires, animées d'un mouvement de rotation et frottant sur une autre surface se rencontrent dans certains organes de machines.

Désignons par P la pression totale de la surface annulaire contre la surface fixe, par d_0 et d_1 les diamètres intérieur et extérieur de l'anneau, et par f le coefficient de frottement. La pression par centimètre carré de la surface annulaire sera $\frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_0^2)}$. Si l'on trace deux cercles, infiniment voisins, avec les rayons x et $x + \partial x$, la résistance due au frottement sur cette surface, d'épaisseur ∂x, sera $2 \pi x \partial x \frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_0^2)} f$.

Si on multiplie cette expression par x et si on la divise par $\frac{d_1}{2}$, on obtient l'intensité de la force qui, appliquée à la cir-

conférence, serait capable de faire équilibre au frottement développé sur la surface $2\pi x \delta x$. Cette force a pour expression :

$$16 \frac{P f}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)} x^2 \delta x$$

Par conséquent, la force totale qui doit agir à la circonférence de la pièce pour vaincre le frottement sur la surface annulaire tout entière sera :

$$16 \frac{P f}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)} \int_{\frac{d_0}{2}}^{\frac{d_1}{2}} x^2 \delta x = \frac{2}{3} P f \frac{d_1^3 - d_0^3}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)}$$

Si d_1 et d_0 sont exprimés en centimètres, et si n représente le nombre de tours que fait la pièce par minute, la vitesse en mètres par seconde d'un point pris sur la circonférence extérieure de l'anneau sera $\frac{d_1 \pi n}{100 \times 60}$ et on aura, par conséquent, pour expression du travail absorbé par le frottement :

$$e = \frac{2 P f}{1910} \frac{d_1^3 - d_0^3}{d_1^2 - d_0^2}$$

Galets de roulement. Considérons un arbre A (fig. 11, pl. XXVIII) dont chaque tourillon, au lieu de reposer sur un coussinet, s'appuie sur un galet C, muni lui-même de deux tourillons B portés par des coussinets ordinaires D. Le tourillon A est d'ailleurs maintenu latéralément par les deux bras d'une fourchette qui l'empêche de se déplacer horizontalement. Un dispositif de ce genre constitue ce qu'on appelle un galet de roulement.

Lorsque l'arbre A est mis en mouvement, son tourillon roule sur le galet C, dont l'arbre tourne sur ses tourillons. Si le tourillon A et la surface du galet sont soigneusement polis, on peut négliger la résistance provenant du roulement de ces deux corps l'un sur l'autre et ne tenir compte que du frottement des tourillons du galet.

Soient P la pression du tourillon A sur le galet, d le diamètre de ce tourillon, D celui du galet et Δ celui des tourillons B ; soit enfin n le nombre de tours que fait le tourillon A par

minute; $\frac{P}{2}$ représente la pression de l'un des tourillons B sur son coussinet et $\frac{1}{2} P f$ la resistance due au frottement. La vitesse à la circonférence du tourillon B s'obtient en multipliant la vitesse à la circonférence du galet C par le rapport $\frac{\Delta}{D}$; elle a donc pour valeur $\frac{\Delta}{D} \frac{\pi d n}{60 \times 100}$; le travail absorbé par le frottement de deux tourillons B est, par conséquent:

$$e = 2 \times \frac{1}{2} P f \frac{\Delta}{D} \frac{\pi d n}{60 \times 100}$$

Ou

$$e = \frac{n d P f}{1910} \frac{\Delta}{D}$$

Cette expression montre que, dans les galets de roulement, le travail du frottement est égal à celui qui correspond à un tourillon ordinaire diminué dans le rapport $\frac{\Delta}{D}$ du diamètre du tourillon du galet au galet lui-même.

Frottement des essieux. Dans les voitures ordinaires, les essieux sont fixés au corps de la voiture et les roues tournent autour des essieux. Dans les wagons, au contraire, les essieux sont calés sur les roues et supportent toute la charge. Cette différence n'exerce d'ailleurs aucune influence sur le frottement des axes et nous nous bornerons à calculer ce frottement pour le cas d'un essieu de wagon.

Désignons par d le diamètre d'un tourillon, D celui d'une roue, i le nombre des roues du wagon, Q_1, Q_2, Q_3 les pressions que supportent les tourillons des essieux, v la vitesse de translation du wagon. Cela posé, $Q_1 f$, $Q_2 f$, $Q_3 f$ représentent les résistances du frottement à la circonférence des tourillons et, comme la vitesse aux points de contact est représentée par $\frac{v d}{D}$, il en résulte que le travail total du frottement des essieux a pour expression:

$$e = Q_1 f v \frac{d}{D} + Q_2 f v \frac{d}{D} + \ldots$$

Ou

$$e = f v \frac{d}{D} (Q_1 + Q_2 + \ldots)$$

Mais la somme $Q_1 + Q_2 + \ldots$ n'est autre chose que la charge totale sur les essieux et, en la désignant par Q, on a:

$$e = Q f \frac{v\,d}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Par conséquent l'effort de traction Z, nécessaire pour vaincre le frottement des essieux, a pour valeur:

$$Z = Q f \frac{d}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Pour les wagons de chemins de fer, on a généralement $\frac{d}{D} = \frac{1}{14}$ et, comme le graissage est continu, on doit prendre $f = 0{\cdot}054$; on trouve alors:

$$Z = \frac{Q}{260}$$

Les équations (1) et (2) montrent qu'il y a avantage à prendre des roues très grandes par rapport aux diamètres des tourillons; on voit également que le nombre des roues n'influe en rien sur le frottement total des essieux. Mais plus le nombre des roues est considérable, plus la pression sur chaque essieu est faible; il en résulte qu'on peut alors prendre des tourillons d'un diamètre plus petit et que, par suite, les roues peuvent avoir aussi un diamètre moins considérable. En résumé, les wagons qui n'ont qu'un petit nombre de roues doivent avoir des tourillons plus forts et des roues plus grandes que les autres.

Dans les locomotives dont les longuerines et les tourillons sont placés à l'extérieur, le rapport $\frac{d}{D}$ est notablement plus faible que dans celles dont les cadres sont à l'intérieur; elles donnent donc lieu à des résistances de frottement moindres.

Si on employait pour les wagons des galets de roulement, les frottements des essieux pourraient être réduits à une valeur très faible, car la force de traction, nécessaire pour vaincre ces frottements se trouverait ramenée à la valeur:

$$Z = Q f \frac{d}{D} \frac{d_1}{D_1}$$

D_1 désignant le diamètre du galet et et d_1 celui de ses tourillons.

Pour $f = 0{\cdot}054$, $\frac{d}{D} = \frac{1}{14}$, $\frac{d_1}{D_1} = \frac{1}{5}$, on aurait:

$$Z = \frac{Q}{1300}$$

Malheureusement, pour les wagons, comme du reste pour toutes les machines soumises à des efforts considérables, les galets ne sauraient être employés avec avantage. Leur construction devient dans ce cas trop compliquée et la fixation des coussinets ne présente pas une sécurité suffisante.

Vis à filets carrés. Lorsqu'on cherche à déterminer exactement les frottements qui prennent naissance dans le mouvement d'une vis, on est conduit à des calculs très laborieux et à des formules d'une complication telle qu'on ne peut songer à s'en servir pour des applications numériques. L'exactitude qu'on obtiendrait, en en faisant usage, serait d'ailleurs purement fictive, car dans la pratique on n'est jamais en état de déterminer la valeur rigoureuse du coefficient de frottement qu'il convient d'adopter pour chaque cas particulier. Nous nous bornerons donc à un calcul d'approximation, en supposant infiniment petite la saillie du filet. Dans cette hypothèse: 1°, tous les points de la surface de la vis ont la même vitesse; 2°, pour tous les points, l'inclinaison de le surface sur un plan perpendiculaire à l'axe a la même valeur.

Si on suppose l'écrou fixe et si on fait tourner la vis, celle-ci prend un mouvement de progression suivant la direction de son axe et, par suite, la surface des filets glisse sur celle de l'écrou, comme ferait un corps placé sur un plan incliné et sollicité par une force horizontale.

Nous pouvons donc appliquer ici la formule que nous avons établie pour le plan incliné; la force horizontale P qui doit être appliquée, tangentiellement à la circonférence de la vis, pour faire équilibre à la charge qui agit sur elle et au frottement qui s'exerce entre les surfaces, a, dans ce cas, pour expression:

$$P = Q \frac{\text{tang}\,\alpha + f}{1 - f\,\text{tang}\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

α désignant l'inclinaison des spires sur un plan perpendiculaire à l'axe. Si on représente par d le diamètre du filet, h la hauteur du pas, on a:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{h}{\pi d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Par conséquent:

$$P = Q \frac{\frac{h}{\pi d} + f}{1 - f \frac{h}{\pi d}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Le travail W que doit développer la force P pour élever d'une hauteur H la charge Q est $P \frac{H}{\text{tang}\,\alpha}$, ou:

$$W = Q\,H \frac{\text{tang}\,\alpha + f}{\text{tang}\,\alpha - f\,\text{tang}^2\,\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

dont le minimum correspond à:

$$\text{tang}\,\alpha = -f + \sqrt{1 + f^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Cette valeur qui est, comme on le voit, la plus avantageuse au point de vue du rendement, donne en général des spires très inclinées, car pour des vis en métal, d'une exécution soignée, f n'a jamais une valeur supérieure à $\frac{1}{10}$.

Lorsqu'on emploie une vis pour exercer, avec une force donnée, une pression considérable, tang α doit être très petit, en d'autres termes, la vis doit être faiblement inclinée, mais alors l'effet utile est extrêmement défavorable; ainsi, par exemple pour $f = 0{\cdot}1$ et tang $\alpha = 0{\cdot}1$ le rapport $\frac{W}{Q\,H}$ ou $\frac{\text{tang}\,\alpha + f}{\text{tang}\,\alpha\,(1 - f\,\text{tang}\,\alpha)}$ a pour valeur $\frac{2}{1 - 0{\cdot}01} = \frac{2}{0{\cdot}99}$ ou 2 approximativement.

En d'autres termes, l'effort nécessaire pour soulever le fardeau est double de ce qu'il serait s'il n'y avait pas de frottement; ce dernier absorbe la moitié du travail développé. La vis est donc, en réalité, un mécanisme très médiocre pour la transmission d'efforts un peu considérables. La force perdue a de plus l'inconvénient de déterminer une usure très rapide de la vis et de son écrou. Pour diminuer autant que possible l'usure de l'écrou, on lui donne en général une assez grande longueur, de manière à réduire l'effort exercé par unité de surface.

On peut se proposer de déterminer la force P_1 qu'il convient d'appliquer à la circonférence de la vis, pour que celle-ci reste en repos sous l'action de la charge Q. Pour cela il suffit, dans l'équation (1), de remplacer P par P_1 et f par $-f$, ce qui donne:

$$P_1 = Q \frac{\text{tang}\,\alpha - f}{1 + f\,\text{tang}\,\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Les vis qui sont destinées à servir comme supports fixes doivent être disposées de telle sorte que, sous l'action de la force dirigée suivant les axes, elles ne tournent pas d'elles mêmes. Pour cela, il faut, en vertu de l'équation (6), que l'on ait:

$$\text{tang}\ \alpha \leqq f$$

Si, au contraire, on veut que la vis tourne d'elle même, quand elle n'est soumise à aucun couple de rotation, on doit prendre:

$$\text{tang}\ \alpha > f.$$

Vis à filet triangulaire. Le calcul exact des frottements dans une vis à filet triangulaire présente des complications et des difficultés qui sont hors de toute proportion avec les avantages que pourrait procurer à la pratique une solution rigoureuse. Si d'ailleurs on voulait aborder rigoureusement le problème, on serait bientôt conduit à de véritables impossibilités de calcul, car on aurait à tenir compte, d'une part, du mode de génération très compliqué de la surface du filet, d'autre part de l'élasticité des matériaux dont sont formés la vis et son écrou; ces deux éléments interviennent, en effet, dans l'intensité de la pression qui s'exerce en chaque point de contact. Nous nous bornerons donc, comme dans le cas précédent, à un calcul d'approximation, parfaitement suffisant pour les besoins de la pratique.

Si on considère une vis à filet triangulaire (fig. 12, pl. XXVIII) et qu'on désigne par α l'inclinaison de l'arête extérieure du filet sur un plan perpendiculaire à l'axe, par β la moitié de l'angle compris entre les deux faces du filet; si de plus on représente par P, Q et f les mêmes éléments que ci-dessus, $\frac{Q \cos \alpha + P \sin \alpha}{\cos \beta}$ sera la pression normale entre la vis et l'écrou. La force $P \cos \alpha$ doit d'ailleurs faire équilibre à la résistance $Q \sin \alpha$, augmentée du frottement produit par la pression normale; on a donc:

$$P \cos \alpha = Q \sin \alpha + \frac{Q \cos \alpha + P \sin \alpha}{\cos \beta} f$$

D'où l'on tire:

$$P = Q \frac{\text{tang}\ \alpha \cos \beta + f}{\cos \beta - f\ \text{tang}\ \alpha} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Le travail W, que doit développer la force P, pour élever la charge Q d'une hauteur H, est $W = P \frac{H}{\text{tang } \alpha}$; on a donc:

$$\frac{W}{QH} = \frac{\text{tang } \alpha \cos \beta + f}{(\cos \beta - f \text{ tang } \alpha) \text{ tang } \alpha} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

On voit que le rendement est encore plus désavantageux que celui que nous avons trouvé pour une vis à filet rectangulaire, car $\cos \beta$ est toujours plus petit que l'unité. Les vis à filets triangulaires ne doivent donc pas être employées (et en réalité elle ne le sont jamais) pour transmettre des forces considérables. Au contraire elles sont très convenables pour les fixations, car la condition pour qu'une pareille vis ne tourne pas d'elle même est:

$$\text{tang } \alpha \leqq \frac{f}{\cos \beta}$$

c'est-à-dire qu'une vis de cette espèce peut avoir, même sans être exposée à tourner d'elle même, une inclinaison plus forte que celle d'une vis à filet carré.

Vis sans fin. Au point de vue du frottement, une vis sans fin, engrenant avec une roue convenablement disposée, peut être assimilée à une vis ordinaire; on peut admettre en effet que la dent de la roue, en prise avec la vis, forme une portion d'écrou. On peut donc approximativement calculer le frottement comme dans le cas d'une vis ordinaire avec écrou complet et écrire:

pour une vis à filet rectangulaire:

$$P = Q \frac{\text{tang } \alpha + f}{1 - f \text{ tang } \alpha}$$

pour une vis à filet triangulaire:

$$P = Q \frac{\text{tang } \alpha \cos \beta + f}{\cos \beta - f \text{ tang } \alpha}$$

Dans ces formules, Q représente la résistance qui agit à la circonférence de la roue dentée, P la force qui doit agir à la circonférence de la vis pour faire équilibre à la résistance Q et au frottement développé, α l'angle que fait la spire extérieure de la vis avec un plan perpendiculaire à son axe, β la moitié de l'angle compris entre les deux faces du filet, quand ce filet est triangulaire.

Il est évident d'ailleurs que cette méthode de calcul est une pure approximation et qu'on ne peut la considérer comme rigoureuse que lorsque la saillie du filet est infiniment petite et le rayon de la roue dentée très grand ou, pour mieux dire, infini.

Ce qui précède indique suffisamment que la vis sans fin ne saurait être recommandée pour la transmission de forces considérables, attendu que, dans la majeure partie des cas, le frottement absorbe la moitié de la force et, dans un mouvement continu, ce travail résistant a nécessairement pour conséquence une usure rapide des pièces. Mais toutes les fois qu'il s'agit de transmettre des forces faibles, la vis sans fin est, comme la vis ordinaire, un mécanisme excellent, car elle permet d'arriver à un rapport très faible entre la puissance et la résistance; elle offre de plus cet avantage, dans un grand nombre d'applications, d'éviter les mouvements de recul; en d'autres termes, avec une vis sans fin, on n'a pas à craindre un mouvement en sens contraire, même lorsqu'on vient à supprimer la force appliquée au volant de la vis pour produire la rotation. C'est là une propriété essentielle pour certains appareils de traction.

Frottement des roues d'engrenages. Dans tous les engrenages de roues droites que nous aurons à étudier dans la suite, la normale au point de contact de deux dents en prise passe par le point de contact des deux cercles primitifs. Pour calculer les frottements qui se développent dans les engrenages, nous pouvons donc partir de cette propriété de la normale.

Soient K k les cercles primitifs de deux roues (fig. 13, pl. XXVIII), a leur point de contact, Z une dent de la roue K, z une dent de la roue k, b le point où a lieu, à un moment quelconque, le contact de ces deux dents, pendant la rotation, e b a E la normale commune au point b, Q la résistance appliquée tangentiellement au cercle k, P la puissance qui doit agir à la circonférence de K, pour faire équilibre à la fois à la résistance Q et au frottement des dents, R et r les rayons des cercles K et k, et enfin N la pression mutuelle des dents. Cette pression agit, dans la direction b n sur la dent z, et dans la direction b n sur la dent Z. A cette pression correspond un frottement N f, qui agit sur la dent z dans la direction b t_1 et sur la dent Z suivant b t. L'équilibre entre les forces P, Q et le frottement exige: 1°, que la force P (appliquée au cercle K) fasse équilibre à la force N dirigée suivant b n et au frottement N f dirigé suivant

b t; 2°, que la force Q (appliquée tangentiellement au cercle k) soit en équilibre avec les forces N et N f dirigées respectivement suivant b n_1 et b t_1. Nous aurons donc, en désignant l'angle a C F par φ et en posant a b = p, les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} P R &= N R \cos\varphi + N f (R \sin\varphi + p) \\ Q r &= N r \cos\varphi + N f (r \sin\varphi - p) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

lesquelles, divisées membre à membre, donnent:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi + \frac{p}{R}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots (2)$$

D'où on tire, pour la valeur de $\frac{P-Q}{Q} = \frac{P}{Q} - 1$:

$$\frac{P-Q}{Q} = \frac{f\,p\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots (3)$$

Mais P — Q n'est autre chose que la résistance due au frottement; si donc on la désigne par F, on a:

$$\frac{F}{Q} = \frac{f\,P\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots (4)$$

Cette équation est rigoureusement exacte et permet de calculer la résistance due au frottement pour un engrenage quelconque, toutes les fois qu'on peut exprimer p en fonction de φ, d'après la forme des dents.

Toutefois, pour évaluer les frottements dans les divers systèmes d'engrenages, nous n'aurons pas recours à cette formule et nous nous contenterons d'un calcul approximatif qui s'applique à tous les cas. Pour y arriver, nous remarquerons que, dans tous les cas de la pratique, φ est un angle très petit et que, par suite, on peut, sans erreur sensible, remplacer par l'unité le dénominateur de l'expression (4); la valeur de $\cos\varphi$ est, en effet, très voisine de l'unité et l'autre terme est négligeable, puisque

$f \sin \varphi$ ou $f\varphi$ et $f\frac{p}{R}$ sont toujours des quantités très petites. Nous aurons donc approximativement pour tous les engrenages:

$$\frac{F}{Q} = f\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Cette formule montre que la résistance due au frottement est variable avec p, c'est-à-dire avec la position qu'occupent les dents pendant tout le temps qu'elles restent en prise. Si donc on veut avoir la valeur moyenne de P, il faut prendre pour p la moyenne de ses valeurs. En suivant le mouvement des dents, à partir du point a, nous voyons que la plus petite valeur de p est zéro et que son maximum est très sensiblement égal à la longueur de l'arc de division t; la valeur moyenne de p est donc $\frac{1}{2}t$, c'est-à-dire la moitié d'une division. On a, par suite, pour la valeur moyenne F_m du frottement:

$$\frac{F_m}{Q} = \frac{1}{2} f t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Si on représente par M et m les nombres de dents des roues K et k, on a $t = \frac{2\pi R}{M}$ et $\frac{R}{r} = \frac{M}{m}$; par conséquent:

$$\frac{F_m}{Q} = f\pi\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

formule qui donne approximativement la résistance due au frottement pour toutes les roues droites, quelle que soit la forme des dents.

On en conclut que le frottement a très sensiblement la même valeur, dans tous les engrenages dont les pas sont faibles. La même équation montre que le frottement diminue, quand le nombre des dents des roues augmente; il y a donc avantage à employer des engrenages à dents nombreuses, c'est-à-dire avec un pas très petit. Si on fait $f = \frac{1}{8}$, $M = m = 12$, la formule (7) donne:

$$\frac{F_m}{Q} = 3{\cdot}142 \times \frac{1}{8}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{5}$$

Ainsi, même avec un coefficient de frottement égal à $\frac{1}{8}$

et avec 12 dents seulement par roue, le frottement ne représente que $\frac{1}{15}$ de la résistance appliquée à la roue conduite.

$$\text{Pour } f = \frac{1}{10},\ M = m = 48$$

$$F_m = 3{\cdot}142 \times \frac{1}{10}\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{48}\right) Q = \frac{1}{76} Q$$

En résumé, au point de vue du frottement, les roues d'engrenages doivent être classées parmi les organes de transmission les plus avantageux.

Frottement des roues d'engrenages coniques. Nous verrons plus loin que, pour les dents des roues coniques, on arrive à des formes convenables en traçant les dents de deux roues droites, dont les rayons sont les génératrices des surfaces coniques complémentaires de celles auxquelles appartiennent les deux roues. Nous pouvons donc dire que la résistance due au frottement dans les roues coniques est la même que celle qui correspondrait aux deux roues droites dont nous venons de parler et qui auraient la même division.

Soient (fig. 1, pl. XXXI) OA et Oa les axes des roues, $AOa = \alpha$ l'angle qu'ils forment, R et r les rayons des roues, S et s les génératrices des cônes complémentaires, M et m les nombres de dents des deux roues coniques, M_1 et m_1 les nombres de dents des roues droites idéales dont nous venons de parler.

Cela posé, en vertu de l'égalité des divisions dans les roues coniques et les roues droites, nous aurons d'abord les relations:

$$\frac{2\pi R}{M} = \frac{2\pi r}{m} = \frac{2\pi S}{M_1} = \frac{2\pi s}{m_1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

d'où l'on déduit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_1} &= \frac{R}{Ms} \\ \frac{1}{M_1} &= \frac{R}{MS} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Comme les deux roues idéales sont des roues dentées droites, la résistance due au frottement qui leur correspond a pour valeur, d'après l'équation (7):

$$F = Q \pi f \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{M_1}\right)$$

Ou, en remplaçant $\frac{1}{m_1}$ et $\frac{1}{M_1}$ pas leurs valeurs tirées des relations (2):

$$F = Q \pi f \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{S}\right) \frac{M}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'exprimer s et S en fonction de r, R et α; or on a:

$$\frac{1}{S} = \frac{\cos \beta}{R}, \quad \frac{1}{s} = \frac{\cos \gamma}{r}$$

β et γ représentant les angles que la génératrice de contact O B fait avec les axes; si on introduit ces valeurs dans l'équation (3), en tenant compte de la relation $\frac{R}{r} = \frac{M}{m}$, on trouve:

$$F = Q \pi f \left(\frac{\cos \beta}{M} + \frac{\cos \gamma}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Pour déterminer les angles β et γ, on a d'ailleurs:

$$\left.\begin{array}{l} \beta + \gamma = \alpha \\ \frac{R}{r} = \frac{M}{m} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

relations qui conduisent immédiatement aux suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang} \beta = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \dfrac{m}{M}} \\ \operatorname{tang} \gamma = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \dfrac{M}{m}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

et comme $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \gamma}}$, il en résulte:

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{\dfrac{\cos\alpha}{m} + \dfrac{1}{M}}{\sqrt{\dfrac{1}{M^2} + \dfrac{1}{m^2} + 2\,\dfrac{1}{M}\,\dfrac{1}{m}\cos\alpha}}\\ \cos\gamma &= \frac{\dfrac{\cos\alpha}{M} + \dfrac{1}{m}}{\sqrt{\dfrac{1}{M^2} + \dfrac{1}{m^2} + 2\,\dfrac{1}{M}\,\dfrac{1}{m}\cos\alpha}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

En portant ces valeurs dans l'équation (4), on arrive enfin, après quelques réductions simples, à la relation :

$$F = Q\pi f \sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2} + 2\,\frac{1}{M}\,\frac{1}{m}\cos\alpha} \quad \ldots (8)$$

Le radical a une valeur moindre que $\frac{1}{M} + \frac{1}{m}$, tant que l'angle α n'est pas nul; il en résulte que, dans les roues d'engrenages coniques, le frottement est encore plus faible que dans les roues droites. Toutefois, pratiquement, cette différence est sans importance, puisque même la plus grande valeur de ce frottement (pour $\alpha = 0$) est très petite.

Cette faible valeur du frottement des dents dans les engrenages constitue un avantage très sérieux dans la pratique, non seulement au point de vue de l'effet utile, mais encore, et surtout, au point de vue de l'usure. En résumé, des roues d'engrenages, munies d'un nombre de dents suffisant, bien tracées et exécutées avec soin, ne donnent lieu, avec un bon graissage, qu'à une perte de force insignifiante et les dents se conservent presque indéfiniment, en donnant toujours un mouvement doux et régulier.

Frottements dans les transmissions par courroies. Dans une transmission par courroie, les tensions de la courroie ont pour résultat de presser énergiquement les axes des poulies sur leurs coussinets et de donner lieu par suite à un frottement assez considérable.

Nous avons montré, page 196, que la tension du brin menant est, en général, double de celle du brin mené et que cette dernière a exactement la valeur de la résistance Q, supposée appliquée à la circonférence de la poulie.

Si l'on désigne par D et D_1 les diamètres des poulies, par d et d_1 ceux des arbres correspondants et par f le coefficient de frottement, chacun des deux axes est pressé sur ses coussinets par une force égale à 2 Q + Q ou 3 Q. Par conséquent, la force qu'il faut appliquer à la circonférence de la poulie, pour vaincre les frottements dus à ces pressions, a pour valeur:

$$3\,Q\,f\left(\frac{d}{D}+\frac{d_1}{D_1}\right)$$

Si la courroie transmet l'intégralité de la force que reçoit l'arbre moteur, les rapports $\frac{d}{D}$ et $\frac{d_1}{D_1}$ sont au moins égaux à $\frac{1}{7}$ et ils sont plus grands encore, si la courroie n'a à transmettre qu'une partie de la force. Si nous faisons $f = 0{\cdot}1$, en prenant en même temps les valeurs les plus favorables de $\frac{d}{D}$ et $\frac{d_1}{D_1}$, le frottement sera, d'après la formule précédente, $\frac{1}{12}$ Q, c'est-à-dire notablement supérieur à celui des roues d'engrenages. On voit donc que, même dans les cas les plus favorables, les courroies ne constituent pas un organe de transmission très avantageux, au point de vue du travail des frottements; en tous cas elles sont, à ce point de vue, notablement inférieures aux roues d'engrenages.

Frottement d'une transmission en tenant compte de son poids. Il n'est pas sans intérêt de rechercher si, au point de vue des résistances passives, il est avantageux de faire usage de transmissions légères, animées d'une grande vitesse de rotation ou, au contraire, de transmissions plus lourdes, tournant moins rapidement.

Soient L la longueur d'une arbre de transmission, d son diamètre en centimètres, n le nombre de tours par minute, γ le poids d'un centimètre cube de la matière dont il est formé, N le travail en chevaux qu'il doit transmettre et f le coefficient de frottement:

$\frac{\pi d^2}{4} L \gamma$ exprime le poids de l'arbre et $\frac{\pi d n}{100 \times 60}$ la vitesse en mètres à la circonférence; par conséquent, le travail absorbé par le frottement sera:

$$e = L\,\frac{\pi d^2}{4}\,\gamma\,\frac{\pi d n}{100 \times 60}\,f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si d'ailleurs l'arbre a été convenablement établi pour le travail qu'il doit transmettre, on a:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

L'élimination de d entre ces 2 équations donne:

$$e = \frac{\pi^2 \gamma (16)^3}{4 \times 60 \times 100} L f N$$

ou, en posant $75\ N = E$:

$$\frac{e}{E} = \frac{\pi^2 \gamma (16)^3}{4 \times 60 \times 100 \times 75} L f \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Pour le fer forgé, on a $\gamma = 0{\cdot}0075$ et, par suite, très approximativement:

$$\frac{e}{E} = \frac{L f}{6000} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Cette expression montre que le rapport entre le travail e, absorbé par le frottement, et le travail E, que l'arbre doit transmettre, a la même valeur pour toutes les transmissions convenablement établies.

Réduction du radical $\sqrt{x^2 + y^2}$ à la forme approchée $\alpha x + \beta y$. Lorsqu'on calcule les résistances de frottement dans des organes de machines, la plupart des complications que l'on rencontre tiennent à ce que les pressions, développées entre les pièces en contact, se présentent sous la forme $\sqrt{x^2 + y^2}$. Il y a donc un certain intérêt à chercher à remplacer cette expression irrationnelle par une autre approchée, de la forme $\alpha x + \beta y$, en déterminant les constantes α et β, de manière à rendre aussi faible que possible l'erreur provenant de cette substitution.

Poncelet, qui le premier a posé ce problème, en a donné la solution, pour certains cas particuliers, à l'aide de considérations géométriques. Nous chercherons ici à le résoudre d'une manière générale par l'analyse, de façon à déterminer les valeurs les plus convenables pour α et β.

Nous supposerons que, sans rien connaitre sur les valeurs absolues de x et de y, on sache cependant entre quelles limites reste compris le rapport $\frac{x}{y}$. Si l'on sait, par exemple, que,

dans tous les cas particuliers d'un problème donné, on doit avoir $y > x$, il en résulte que toutes les valeurs possibles de $\frac{x}{y}$ sont comprises entre 0 et 1 et que, par suite, 0 et 1 sont les limites entre lesquelles se trouve renfermé ce rapport.

Si nous posons $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$, nous aurons $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ et $\alpha x + \beta y = r\,(\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)$ et, par suite, la différence

$$\sqrt{x^2 + y^2} - (\alpha x + \beta y) = r \left[1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)\right] = f$$

représente l'erreur commise, en remplaçant le radical par l'expression $\alpha x + \beta y$.

Comme on a $\frac{x}{y} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \operatorname{tang} \varphi$, il en résulte que nous pouvons exprimer les limites données, pour le rapport $\frac{x}{y}$, par les tangentes de certains angles φ_1 et φ_0.

Les valeurs de α et de β qu'on devra choisir seront celles pour lesquelles la valeur moyenne T du carré de l'erreur sera un minimum; or on a:

$$f^2 = r^2 \left[1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)\right]^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

D'un autre côté la valeur moyenne T du carré de cette erreur, entre les limites φ_1 et φ_0, est:

$$\frac{1}{\varphi_1 - \varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 \left[1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)\right]^2 d\varphi = T$$

Ou, en développant:

$$T = \frac{r^2}{\varphi_1 - \varphi_0} \times$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[1 + \alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi + 2\,\alpha\,\beta \sin \varphi \cos \varphi - 2\,\alpha \sin \varphi - 2\,\beta \cos \varphi\right] d\varphi \;(2)$$

D'ailleurs:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\,\varphi}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\,\varphi}{2}$$

Par conséquent:

$$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right)$$

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right)$$

$$\int \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} (1 - \cos 2\varphi)$$

Au moyen de ces formules, on obtient:

$$T = \frac{r^2}{\varphi_1 - \varphi_0} \left\{ \begin{aligned} & \varphi_1 - \varphi_0 + \alpha^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)\right] \\ & + \beta^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)\right] \\ & + \frac{1}{2} \alpha \beta \left[\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1\right] \\ & - 2\alpha \left[\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1\right] \\ & - 2\beta \left[\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0\right] \end{aligned} \right\} \quad . \quad (3)$$

Les valeurs les plus convenables de α et de β sont celles pour lesquelles on a $\frac{dT}{d\alpha} = 0$ et $\frac{dT}{d\beta} = 0$

En différentiant la valeur de T, successivement par rapport à α et à β, on trouve:

$$\frac{dT}{d\alpha} = 0 = \left\{ \begin{aligned} & 2\alpha \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)\right] \\ & + \frac{1}{2} \beta \left[\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1\right] \\ & - 2 \left[\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1\right] \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

$$\frac{dT}{d\beta} = 0 = \left\{ \begin{aligned} & 2\beta \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)\right] \\ & + \frac{1}{2} \alpha \left[\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1\right] \\ & - 2 \left[\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0\right] \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Si on tient compte des formules connues, pour les sommes et les différences de sinus et de cosinus, les expressions (4) et (5) prennent les formes suivantes:

$$\alpha\left[(\varphi_1-\varphi_0)-\cos(\varphi_1+\varphi_0)\sin(\varphi_1-\varphi_0)\right]$$

$$+\beta\sin(\varphi_1+\varphi_0)\sin(\varphi_1-\varphi_0)=4\sin\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}.$$

$$\beta\left[(\varphi_1-\varphi_0)+\cos(\varphi_1+\varphi_0)\sin(\varphi_1-\varphi_0)\right]$$

$$+\alpha\sin(\varphi_1+\varphi_0)\sin(\varphi_1-\varphi_0)=4\cos\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}.$$

après réduction on obtient:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=2\,\frac{\cos\varphi_0-\cos\varphi_1}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)}\\ \beta&=2\,\frac{\sin\varphi_1-\sin\varphi_0}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

expressions qui donnent les valeurs les plus convenables de α et de β, pour la transformation du radical $\sqrt{x^2+y^2}$. On a donc:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\alpha x+\beta y=$$

$$2\,\frac{\cos\varphi_0-\cos\varphi_1}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)}\,x+2\,\frac{\sin\varphi_1-\sin\varphi_0}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)}\,y\ .\quad(7)$$

En admettant, comme nous l'avons fait, que $\frac{x}{y}=\operatorname{tang}\varphi$ est compris entre 0 et 1, les limites de φ sont 0 et $\frac{\pi}{4}$ et l'équation (7) donne alors:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\,\frac{\cos 0^0-\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}-0+\sin\frac{\pi}{4}}\,x+2\,\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0^0}{\frac{\pi}{4}-0+\sin\frac{\pi}{4}}\,y$$

Ou

$$\sqrt{x^2+y^2}=0{\cdot}393\,x+0{\cdot}947\,y$$

Si, au contraire, on ne sait absolument rien sur le rapport $\frac{x}{y}$, on doit admettre qu'il peut prendre toutes les valeurs posi-

tives imaginables et, dès-lors, les limites de φ sont $\varphi_o = 0$ et $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; la formule approchée donne dans ce cas:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{\cos 0^0 - \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - 0 + \sin \frac{\pi}{2}} x + 2 \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0^0}{\frac{\pi}{2} - 0 + \sin \frac{\pi}{2}} y$$

Ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{\cdot}777 (x + y)$$

Raideur des cordes.

Imaginons un tambour A (fig. 2, pl. XXXI), muni de tourillons, sur lequel est enroulée une corde, dont l'extrémité supporte un poids Q: proposons nous de déterminer la force P qu'il convient d'appliquer à l'extrémité libre de cette corde, pour soulever la charge et vaincre les résistances dues à la raideur de la corde et au frottement des tourillons du tambour. Par suite de la raideur, les axes des portions de corde non enroulées ne forment pas des lignes droites, mais des courbes ayant pour asymptôtes les directions de P et de Q.

Si du centre du rouleau on abaisse des perpendiculaires sur les directions de P et de Q prolongées, la première de ces lignes (q) sera plus grande et la seconde (p) plus petite que le rayon du tambour, augmenté de la moitié de l'épaisseur de la corde. Il est d'ailleurs facile d'exprimer les conditions d'équilibre. Soient δ, Δ et D les diamètres de la corde, des tourillons et du tambour, $(P + Q) f$ représentera le frottement s'exerçant à la circonférence des tourillons et $(P + Q) f \frac{\Delta}{2}$ sera son moment par rapport à l'axe. On aura donc:

$$P p = Q q + (P + Q) f \frac{\Delta}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

D'où on tire:

$$P - Q = Q \left(\frac{\frac{q}{p} - 1 + f \frac{\Delta}{p}}{1 - f \frac{\Delta}{2\,p}} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Cette expression déterminerait avec exactitude la force $P - Q$, nécessaire pour vaincre le frottement des tourillons et la raideur

de la corde, si on connaissait p et q; mais, dans un corps à texture compliquée et à élasticité variable, comme une corde, ces quantités ne peuvent pas être déterminées par le calcul; on doit donc se contenter d'approximations et de résultats d'expériences. Eitelwein et Coulomb se sont tous les deux occupés de cette question; les expériences de Coulomb sont de beaucoup les plus exactes; elles conduisent à admettre, comme relation approximative:

$$\frac{q}{p} - 1 = 0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D}$$

δ et D étant supposés exprimés en centimètres. Si on introduit cette valeur dans l'équation (2), en négligeant le terme $f \frac{\Delta}{2p}$ par rapport à l'unité et en remplaçant de plus p par $\frac{D}{2}$ dans le quotient $f \frac{\Delta}{p}$, on obtient:

$$P - Q = Q\left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2f \frac{\Delta}{D}\right) \ldots\ldots \quad (3)$$

L'exactitude de cette formule peut certainement être contestée, et il est bien évident qu'on ne doit, en tous cas, l'appliquer qu'à des cordes qui se trouvent dans un état moyen de conservation, car la raideur d'une corde dépend d'une infinité de conditions dont on ne peut tenir compte dans une formule; elle varie avec la nature, l'élasticité et la longueur des fibres de chanvre, le mode de fabrication, la torsion plus ou moins forte des brins et des fibres; enfin l'âge d'une corde, les substances dont elle est imprégnée (eau, savon, huile, goudron, etc.) sont autant d'éléments qui influent sur la raideur. On voit par là qu'il ne saurait être question de calculer exactement cette raideur et que ce calcul exact, fût-il possible, n'aurait aucune utilité, car il est bien évident qu'avant d'employer une corde, on ne pourrait pas s'astreindre à toutes les expériences nécessaires pour fournir les éléments de ce calcul.

Pour les câbles métalliques, de quelques expériences on peut conclure que la résistance, due à la raideur, peut être approximativement représentée par:

$$0{\cdot}58\, Q \frac{\delta^2}{D} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Comme, à résistance égale, le diamètre d'un câble métallique est la moitié seulement de celui d'un câble en chanvre, l'expression précédente montre que la raideur d'un câble en fer est plus faible que celle d'une corde en chanvre, présentant le même degré de solidité.

Détermination théorique de la raideur des câbles. Si on imagine que la matière, qui constitue un câble, soit uniformément répartie dans son intérieur (hypothèse à peu près vraie pour un câble en chanvre, moins exacte pour un câble métallique), on peut considérer ce câble comme une tige élastique et la raideur sera alors déterminée par la force nécessaire pour courber, sur la surface du tambour, le câble primitivement droit.

Dans la premier chapitre, page 53, nous avons trouvé que le travail nécessaire pour courber, suivant un arc de cercle, une tige primitivement droite, avait pour expression:

$$W = \frac{\varepsilon \mu l}{2 R^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ε représentant le module d'élasticité de la matière, l la longueur de la portion de tige courbée, μ le moment d'inertie de la section de la tige par rapport à un axe, passant au centre de gravité et normal au plan de flexion, R le rayon du cercle suivant lequel la tige est courbée.

Si on désigne par S la résistance due à la raideur, cette force agit sur la longueur l, qui représente la portion du câble enroulée sur le tambour; le travail de cette résistance est, par suite, $S\,l$ et il doit être égal à la valeur de W que nous venons d'indiquer; en égalant ces deux quantités et en divisant par l, on a:

$$S = \frac{\varepsilon \mu}{2 R^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Pour un câble cylindrique, de diamètre δ, $\mu = \frac{\pi}{64} \delta^4$.

D désignant le diamètre du tambour, on a $D = 2R$, par suite :

$$S = \frac{\pi}{32} \varepsilon \frac{\delta^4}{D^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Pour un câble plat, d'épaisseur δ et de largeur β, $\mu = \frac{1}{12} \beta \delta^3$ et alors:

$$S = \frac{1}{6} \, \varepsilon \, \beta \, \frac{\delta^3}{D^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ces considérations théoriques (complétement différentes des règles empiriques établies par Prony et Eitelwein) montrent que la résistance due à la raideur est indépendante de la tension du câble, inversement proportionnelle au carré du diamètre du tambour et, pour un câble rond, directement proportionnelle à la quatrième puissance du diamètre. Cette divergence entre la théorie et les formules empiriques semble indiquer que l'hypothèse, sur laquelle est fondée notre théorie, c'est-à-dire l'assimilation d'un câble à une tige élastique homogène, n'est pas entièrement conforme à la nature des choses; toutefois, il peut se faire que les formules empiriques soient inexactes; ainsi, par exemple, rien ne prouve que la raideur soit réellement proportionnelle à la tension du câble. Des expériences plus précises permettront seules de déterminer, par la suite, si la théorie se rapproche plus ou moins de la vérité que les formules empiriques.

Détermination de la courbe de l'axe d'un câble. Soit $A B m m_1$ (fig. 3, pl. XXXI) la courbe affectée par l'axe d'un câble; B_1 étant le point où ce câble commence à toucher le tambour, posons $A O B = \alpha$, $A O = O B = R$; soient $O p = x$, $m p = y$ les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, $A C = a$ la longueur de la perpendiculaire, abaissée du centre O sur la direction de la force Q, ϱ le rayon de courbure, correspondant au point m, μ le moment d'inertie d'une section du câble, par rapport à un axe passant au centre de gravité et normal au plan de la figure.

Si l'on pose, pour abréger:

$$m = \frac{Q}{\varepsilon \, \mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

l'équation différentielle de la ligne d'axe sera, en vertu de la relation (4), page 50:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = m (y - a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dont l'intégrale est:

$$y = a + B e^{\sqrt{m}\,x} + C e^{-\sqrt{m}\,x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

d'où on tire, en différentiant:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{m}\left(B e^{\sqrt{m}\,x} - C e^{-\sqrt{m}\,x}\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

B et C représentant deux constantes.

Comme la courbe doit passer par le point B, on a:

pour $x = -R\cos\alpha$, $y = R\sin\alpha$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\alpha$, $-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R}$

Par conséquent, en vertu des équations (2), (3) et (4), nous aurons les relations:

$$\left.\begin{aligned} & m(a - R\sin\alpha) = \frac{1}{R} \\ & \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{m}\left(B e^{-\sqrt{m}\,R\cos\alpha} - C e^{\sqrt{m}\,R\cos\alpha}\right) \\ & R\sin\alpha = a + B e^{-\sqrt{m}\,R\cos\alpha} + C e^{\sqrt{m}\,R\cos\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

Si on désigne par x_1 l'abscisse du point m_1, où agit la charge, par β l'angle, en général très petit, que forme avec l'axe des x la tangente à la courbe au point m_1, on a:

pour $x = x_1$, $y = a$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\beta$

Et, par conséquent:

$$\left.\begin{aligned} & a = a + B e^{\sqrt{m}\,x_1} + C e^{-\sqrt{m}\,x_1} \\ & \operatorname{tang}\beta = \left(B e^{\sqrt{m}\,x_1} - C e^{-\sqrt{m}\,x_1}\right)\sqrt{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

De la seconde et de la troisième des équations (5) on tire:

$$\left.\begin{aligned} & B = \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\,R\cos\alpha}\left[\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} + (R\sin\alpha - a)\right] \\ & C = -\frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\,R\cos\alpha}\left[\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} - (R\sin\alpha - a)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (7)$$

ou, en remplaçant $R \sin \alpha - a$ par $-\frac{1}{mR}$, en vertu de la première des équations (5):

$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left(\frac{\cot g\, \alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m R}\right) \\ C = -\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left(\frac{\cot g\, \alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m R}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

$$\frac{B}{C} = - \frac{\frac{\cot g\, \alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m R}}{\frac{\cot g\, \alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m R}}\, e^{2\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \quad \ldots\ldots (9)$$

Les équations (6) donnent d'un autre côté:

$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{1}{2} \frac{\tan g\, \beta}{\sqrt{m}}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1} \\ C = -\frac{1}{2} \frac{\tan g\, \beta}{\sqrt{m}}\, e^{\sqrt{m}\, x_1} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

$$\frac{B}{C} = -\, e^{-2\sqrt{m}\, x_1} \quad \ldots\ldots (11)$$

En égalant entre elles les valeurs de $\frac{B}{C}$, fournies par les relations (9) et (11), on arrive à l'équation:

$$e^{-2\sqrt{m}\, x_1} = e^{2\sqrt{m}\, R \cos \alpha}\, \frac{\frac{\cot g\, \alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m R}}{\frac{\cot g\, \alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m R}} \quad \ldots (12)$$

qui détermine l'angle α, c'est-à-dire le point B_1, où commence l'enroulement.

α étant déterminé, on peut obtenir de la manière suivante les autres constantes inconnues du problème.

Les équations (8) donnent:

$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left(\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m R}\right) \\ C = -\frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left(\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m R}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

De la première des équations (5) on tire:

$$a = R \sin \alpha + \frac{1}{m R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Enfin la seconde des équations (6) fournit:

$$\operatorname{tang} \beta = \left(B\, e^{\sqrt{m}\, x_1} - C\, e^{-\sqrt{m}\, x_1}\right) \sqrt{m} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Ces résultats se trouvent notablement simplifiés, lorsqu'on admet que le brin, auquel est suspendu la charge, a une très grande longueur. Dans ce cas, en effet, x_1 est très grand et si m a également une assez grande valeur (ce qui a lieu si le câble est flexible et assez fortement tendu), $e^{-\sqrt{m}\, x_1}$ devient très petit et peut être négligé sans erreur sensible.

Si donc on fait $e^{-\sqrt{m}\, x_1} = o$ dans les relations de (12) à (15), on obtient:

$$\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m R} = 0$$

Ou

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{R \sqrt{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}} = \frac{R \sqrt{m}}{\sqrt{R^2 m + 1}} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\left.\begin{array}{l} B = o \\ C = -\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \times \frac{2}{m R} = -\frac{1}{m R}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \end{array}\right\}. \quad (18)$$

$$a = \frac{R^2 \sqrt{m}}{\sqrt{R^2 m + 1}} + \frac{1}{m R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$\operatorname{tang} \beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Comme, pour un câble suffisamment flexible et fortement tendu, $R^2 m$ est une quantité très petite par rapport à l'unité, on peut poser:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 m + 1}} = \frac{1}{R\sqrt{m}\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 m}}} = \frac{1}{R\sqrt{m}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{R^2 m}\right)$$

ce qui conduit à:

$$a = R\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{R^2 m}\right) + \frac{1}{m R} = R + \frac{1}{2}\frac{1}{m R} \quad . \; . \; . \quad (21)$$

Si on désigne par S la résistance due à la raideur, on a:

$$Q\, a = (Q + S)\, R$$

Par conséquent:

$$S = Q\,\frac{a - R}{R}$$

ou, en tenant compte de la relation (21):

$$S = \frac{Q}{2\, m\, R^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

En remplaçant m par sa valeur tirée de l'équation (1):

$$S = \frac{\varepsilon\,\mu}{2\,R^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

expression identique à celle que nous avons trouvée, page 312, par une méthode différente.

La substitution de la valeur de m, dans l'équation (21), donne:

$$a = R + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\,\mu}{R\,Q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Enfin, en vertu de l'équation (17), on a approximativement:

$$\sin\alpha = 1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\,\mu}{Q\,R^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Ces deux dernières équations déterminent la distance a à laquelle agit la charge et l'angle d'enroulement α.

Enroulement d'une chaine. L'enroulement et le déroulement d'une chaine, soumise à une certaine tension et passant sur

un tambour, donne lieu à une résistance analogue à celle que nous venons d'étudier pour les câbles.

Désignons par δ (fig. 4, pl. XXXI) le diamètre du fer d'un anneau, par D le diamètre du tambour sur lequel s'effectue l'enroulement, par e la longueur intérieure d'un maillon, par α l'angle que font entre elles les directions de deux maillons consécutifs, dans la portion enroulée, par Q la charge suspendue à l'extrémité de la chaine, par f_1 le coefficient du frottement qui s'exerce entre deux maillons, par d le diamètre des tourillons du tambour, par f le coefficient de frottement de ces tourillons et enfin par P l'effort qu'il faut exercer, sur la partie de la chaine qui se déroule, pour vaincre l'action de la charge et des résistances.

On a d'abord $e = \left(\frac{D}{2} + \frac{\delta}{2}\right)\alpha$ ou $\alpha = \frac{2e}{D+\delta}$. D'un autre côté, $\alpha\frac{\delta}{2} = \frac{2e}{D+\delta} \times \frac{\delta}{2} = \frac{e\delta}{D+\delta}$ représente le chemin parcouru par le point d'application de la force de frottement Qf_1, lorsqu'un maillon se déplace, par rapport au maillon voisin, de l'angle α; $Qf_1\frac{e\delta}{D+\delta}$ sera, par suite, le travail absorbé par ce frottement. Si, pour un instant, on appelle X la force qui, appliquée à la distance $\frac{D}{2} + \frac{\delta}{2}$ de l'axe, devrait parcourir le chemin e, pour produire le même travail, on aura:

$$X e = Q f_1 \frac{e d}{D+\delta}$$

d'où $X = Q f_1 \frac{\delta}{D+\delta}$. Cette expression représente la force nécessaire pour l'enroulement de la chaine.

Lorsque l'une des extrémités de la chaine se déroule, en même temps que l'autre s'enroule, la résistance devient double de ce qu'elle est dans le cas où il y a seulement enroulement.

Comme d'ailleurs δ peut être négligé par rapport à D, nous arrivons, pour la résistance des chaines, aux expressions suivantes:

1°, Lorsque la chaine ne fait que s'enrouler . . . $Q f_1 \frac{\delta}{D}$

2°, Lorsqu'une extrémité s'enroule pendant que l'autre se déroule . . . . $2 Q f_1 \frac{\delta}{D}$

Ces résistances sont, comme on le voit, assez faibles et indépendantes d'ailleurs de la longueur des anneaux.

Comparons cette résistance avec celle que donnerait la raideur d'un câble de même force. Pour ce dernier la résistance est:

$$0{\cdot}26\,\frac{\delta_1^2}{D_1}\,Q$$

D'après les formules que nous avons indiquées précédemment, on doit avoir $\delta_1 = 0{\cdot}113\,\sqrt{Q}$ (page 132) et $\delta = 0{\cdot}028\,\sqrt{Q}$ (page 144).

Par suite, le rapport entre la résistance du câble et celle de la chaine a pour expression (f_1 étant pris égal à $0{\cdot}1$):

$$\frac{0{\cdot}26\,\frac{Q}{D_1}\,(0{\cdot}113)^2\,Q}{2\,Q\,f_1\,\frac{0{\cdot}028\,\sqrt{Q}}{D}} = 0{\cdot}59\,\frac{D}{D_1}\,\sqrt{Q}$$

Si les tambours ont le même diamètre, c'est-à-dire si $D = D_1$, la résistance due à la raideur du câble est supérieure à celle de la chaine, lorsqu'on a $\sqrt{Q} > \frac{1}{0{\cdot}59}$ ou $Q > 2$ kilogrammes. Or, dans tous les cas de la pratique, Q a, en réalité, une valeur beaucoup plus grande; on peut donc dire que la résistance due à la raideur d'un câble est toujours supérieure à celle d'une chaine de même force.

Si, dans le cas d'une chaine, dont un brin s'enroule pendant que l'autre se déroule, on veut tenir compte, non seulement de la résistance de la chaine, mais encore du frottement des axes du tambour, on arrive, pour la valeur de la force P qu'il faut exercer sur le brin qui se déroule, à l'expression:

$$P = Q\left(1 + 2\,f_1\,\frac{\delta}{D} + 2\,f\,\frac{d}{D}\right)$$

Si on veut que le rapport $\frac{P}{Q}$ ait une certaine valeur déterminée p_1, on doit poser:

$$p_1 = 1 + 2\,f_1\,\frac{\delta}{D} + 2\,f\,\frac{d}{D}$$

d'où on tire:

$$D = \frac{2\,f_1\,\delta + 2\,f\,d}{p_1 - 1}$$

Mais on a, en vertu de formules indiquées précédemment, $\delta = 0{\cdot}028 \sqrt{Q}$, $d = 0{\cdot}12 \sqrt{Q}$; si de plus on fait $f_1 = f = 0{\cdot}1$, on trouve:

$$D = 0{\cdot}0296 \frac{\sqrt{Q}}{p_1 - 1}$$

Cette équation donne:

pour $p_1 =$	1·04	1·06	1·08	1·10
$\frac{D}{\sqrt{Q}} =$	0·74	0·43	0·37	0·30

Résistance au roulement. On désigne sous ce nom la résistance qui se produit, lorsqu'on fait rouler un corps cylindrique sur un plan non élastique et plus au moins mou.

Sur un plan parfaitement élastique, revenant toujours exactement à sa forme primitive, lorsqu'il a été comprimé, une résistance de ce genre ne saurait se produire.

Soient C (fig. 5, pl. XXXI) le centre d'un corps roulant et E A B F le chemin qu'il parcourt. Jusqu'au point A, le chemin a déjà cédé sous l'action du corps, tandis que la partie B F se trouve encore à l'état naturel. Soient K la force qui doit agir horizontalement sur l'axe du rouleau, pour vaincre la résistance, R le rayon C A = C m = C B du corps roulant, α = A B C l'angle qui correspond à l'enfoncement (ξ = A D) du corps dans le chemin. Comme, dans tous les cas de la pratique, l'arc A B, ou l'angle α, est une grandeur très petite, on ne s'éloignera pas beaucoup de la vérité, en admettant qu'en un point quelconque m, le chemin oppose à l'enfoncement du cylindre une résistance proportionnelle à la distance du point m au plan B F.

Si on désigne par φ l'angle A C m, on a:

$$m\,n = \xi - R\,(1 - \cos\varphi)$$

et, comme α et φ sont des quantités infiniment petites, on peut poser:

$$1 - \cos\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2$$

par suite:

$$m\,n = \xi - \frac{1}{2} R\,\varphi^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Représentons par β la largeur du rouleau, par P la pression qu'il exerce sur le chemin, et par λ un coefficient qui mesure la

compressibilité de ce chemin; on a alors, avec une approximation suffisante,

$$\int_0^\alpha \lambda\beta\left(\xi - \frac{1}{2} R\,\varphi^2\right) R\,d\,\varphi,$$

pour la somme de toutes les réactions exercées par le chemin sur le rouleau. La somme des moments de ces réactions, par rapport à un axe de rotation passant en A, sera:

$$\int_0^\alpha \lambda\beta\left(\xi - \frac{1}{2} R\,\varphi^2\right) R\,d\,\varphi\; R \sin\varphi$$

Par conséquent, nous pouvons écrire les relations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^\alpha \lambda\beta\left(\xi - \frac{1}{2} R\,\varphi^2\right) R\,d\,\varphi = P \\ \int_0^\alpha \lambda\beta\left(\xi - \frac{1}{2} R\,\varphi^2\right) R^2 \sin\varphi\,d\,\varphi = K\,R \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

où on peut d'ailleurs remplacer $\sin\varphi$ par l'arc φ lui-même. L'intégration de ces équations, ainsi simplifiées, donne:

$$\left.\begin{array}{l} P = \lambda\,\beta\,R\left(\xi\,\alpha - \frac{1}{6} R\,\alpha^3\right) \\ K = \lambda\,\beta\,R\left(\xi\,\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{8} R\,\alpha^4\right) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Mais on a $R(1 - \cos\alpha) = \xi$ ou, approximativement, $\xi = \frac{1}{2} R\,\alpha^2$. En introduisant cette valeur dans les relations (3), elles deviennent:

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{1}{3}\,\lambda\,\beta\,R^2\,\alpha^3 \\ K = \frac{1}{8}\,\lambda\,\beta\,R^2\,\alpha^4 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

d'où on tire, par l'élimination de α:

$$K = \frac{1}{8} \, 3^{\frac{4}{3}} \frac{P^{\frac{4}{3}}}{\lambda^{\frac{1}{3}} \, \beta^{\frac{1}{3}} \, R^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Cette équation montre que la résistance au roulement est d'autant plus faible que λ, β et R sont plus grands, c'est-à-dire que le chemin est plus résistant et que le diamètre des roues et la largeur des jantes sont plus considérables.

QUATRIÈME SÉCTION.

Des Engrenages.

Introduction à la théorie des engrenages. Tracé des courbes. Dans la théorie géométrique des organes de transmission de mouvement que nous nous proposons d'étudier, certaines courbes jouent un rôle assez important, pour qu'il y ait lieu d'indiquer rapidement leur mode de construction graphique. Nous nous bornerons d'ailleurs aux méthodes de tracé les plus simples, à celles qui n'exigent qu'un petit nombre de lignes auxiliaires.

Tracé d'une parabole. Soit A (fig. 6, pl. XXXI) le sommet de la parabole, dont A x est l'axe, et soit M un point de cette courbe.

Abaissons la perpendiculaire M p, traçons le rectangle A p M b et divisons A b et b M en un même nombre de parties égales; si on joint le point A aux points 1, 2, 3, de division de b M et si, par les points 1_1, 2_1, 3_1, on mène des parallèles à A x, les points d'intersection de ces lignes III, II, I seront des points de la parabole.

L'exactitude de cette construction peut se vérifier de la manière suivante: désignons par $x = A\,p_1$ et $y = I\,p_1$ les coordonnées d'un point quelconque I, par $A\,p = \alpha$ et $M\,p = \beta$, les coordonnées du point M, on a:

$$\frac{x}{y} = \frac{b\,1}{\beta}$$

Mais, en vertu même du mode de division des lignes A b et b M, on a aussi:

$$\frac{b\,1}{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ces deux équations combinées donnent:

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha}\,x$$

c'est-à-dire que le point I appartient bien à la parabole.

Tracé d'une ellipse, dont les axes sont donnés. Parmi toutes les méthodes qu'on peut employer pour le tracé d'une ellipse, nous choisirons la suivante, qui nous parait la plus commode pour la pratique.

Soit O (fig. 7, pl. XXXI) le centre d'une ellipse, dont les deux demi-axes sont O a et O b. Du point O, comme centre, décrivons trois cercles concentriques, le premier β b avec le demi-petit axe pour rayon, le second a α avec le demi-grand axe, le troisième c γ avec la somme de ces deux demi-axes. Si on mène un rayon quelconque O q p r, que, par ses points de rencontre p et q avec les cercles a α et b β, on trace des parallèles à O b et O a, ces lignes se couperont en un point m, qui appartiendra à l'ellipse, et la ligne m r donnera la direction de la normale à la courbe au point m.

En effet, si nous désignons par a et b les deux demi-axes, par x et y les coordonnées du point m et par φ l'angle c O r, nous aurons:

$$m\,n = y = O\,q\,\sin\varphi = b\,\sin\varphi, \quad O\,n = x = O\,p\,\cos\varphi = a\,\cos\varphi$$

Et, par suite:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

équation d'une ellipse, dont les axes ont pour valeur 2 a et 2 b.

D'un autre côté, si on désigne par Θ l'angle que fait la normale au point m avec l'axe des x, on a, comme on le sait:

$$\operatorname{tang}\Theta = -\frac{d\,x}{d\,y} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Mais, en vertu de l'équation (1), on a aussi $\frac{x\,d\,x}{a^2} + \frac{y\,d\,y}{b^2} = 0,$

d'où on tire $\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}$ et, par suite, $\tang \Theta = \frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}$. Or, si on désigne par σ l'angle que fait la ligne r m s avec O c, on trouve facilement $\tang \sigma = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi}$ ou, comme $\sin \varphi = \frac{y}{b}$, $\cos \varphi = \frac{x}{a}$:

$$\tang \sigma = \frac{a\frac{y}{b}}{b\frac{x}{a}} = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y}{x}$$

On a donc $\tang \Theta = \tang \sigma$, on $\Theta = \sigma$, c'est-à-dire que la direction de la ligne r m s coïncide bien avec celle de la normale en m.

Tracé approché d'une ellipse. Soient $O a = a$, $O b = b$ (fig. 8, pl. XXXI) les demi-axes d'une ellipse. Prenons $O d = O d_1 = 3\frac{a-b}{2}$ et $O e = O e_1 = 4\frac{a-b}{2}$, et joignons, par des lignes droites, les points e, d, e_1, d_1, ainsi déterminés. Maintenant si, des points d et d_1 comme centres, avec un rayon $d a = d_1 a_1$, nous décrivons des arcs de cercle n a m et $n_1 a_1 m_1$, et que nous fassions de même pour les points e et e_1, avec $e d n = e_1 d_1 n_1$ pour rayon, les quatre arcs n a m, $n_1 a_1 m_1$, m b m_1, n b n_1 forment une courbe qui, pour un œil peu exercé, représente une ellipse. Toutefois, l'erreur que l'on commet, en adoptant ce tracé, n'est négligeable que si les deux axes diffèrent assez peu l'un de l'autre.

Tracé d'une cycloïde. Si on imagine un cercle k (fig. 9, pl. XXXI) roulant sur une ligne droite a x, à partir du point a, il est facile d'obtenir un point m de la cycloïde décrite; pour cela, il suffit de prendre un point b sur l'axe a x, de tracer le cercle générateur correspondant et de porter sur ce cercle, à partir du point de contact, un arc b m, dont la longueur soit égale à a b; si on joint le point m au point b, la droite b m est la direction de la normale à la courbe au point m. Si on répète ce tracé, en prenant sur a x un certain nombre de points, on obtient une série de points de la cycloïde et les normales correspondantes; toutefois, ce tracé présente l'inconvénient d'introduire un grand nombre de lignes droites et de cercles auxiliaires, qui surchargent la figure. Aussi est-il préférable de recourir au tracé suivant qui, tout en présentant le même degré d'exactitude, n'a pas les mêmes inconvénients.

La fig. 1, pl. XXXII, représente la moitié du cercle générateur et la tangente $0\,x$ est la ligne de roulement. Prenons sur le cercle un arc $0\,5$ égal à la longueur $0\,5_1$, mesurée sur $0\,x$, et partageons les longueurs $0\,5$ et $0\,5_1$ en un même nombre de parties toutes égales entre elles; menons les cordes $0\,1$, $0\,2$, $0\,3$, $0\,4$, $0\,5$, et, par les points 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, des parallèles à ces cordes; les lignes, ainsi tracées, se coupent aux points 1_1, II, III, IV, et il est facile de reconnaitre que ces points représentent une série de centres de courbure de la cycloïde, tandis que les lignes qui passent par ces points, et qui sont parallèles aux cordes du cercle, sont des normales à la même courbe.

Si donc, du point 1_1 comme centre, avec le rayon $1_1\,0$, on décrit un arc de cercle $0\,a$, puis du point II, avec II a pour rayon, un second arc $a\,b$, et ainsi de suite, la série des arcs de cercle, ainsi obtenus, représentera, avec une exactitude suffisante pour la pratique, l'arc total $0\,c$ de la cycloïde.

Tracé d'une épicycloïde. L'épicycloïde est la courbe que décrit un point de la circonférence d'un cercle roulant sur un autre cercle. Le cercle mobile prend le nom de cercle générateur et le cercle fixe celui de cercle directeur.

Soient a (fig. 2, pl. XXXII) l'origine d'un arc d'épicycloïde, $a\,b$ l'arc fixe sur lequel s'effectue le roulement, k la position du cercle générateur. Si l'on prend $b\,m = b\,a$, le point m appartiendra à l'épicycloïde et $m\,h$ sera la direction de la normale à la courbe en ce point. En prenant sur le cercle directeur K un certain nombre de points, en traçant chaque fois le cercle générateur correspondant et, en portant sur sa circonférence, à partir du point de contact, une longueur d'arc convenable, on obtiendra une série de points de l'épicycloïde, avec les normales en chacun de ces points. Chacune de ces normales, $m\,b$, par exemple, coupe le cercle directeur en un second point e, qu'il est facile de déterminer; en effet, en désignant par R et r les rayons des cercles K et k et, en remarquant que les angles $b\,C\,e$ et $m\,c\,b$ sont égaux, on a $b\,e = \frac{R}{r}\,a\,b$, ou, en posant $\frac{R}{r} = n$:

$$b\,e = n\,.\,a\,b$$

Ainsi donc, pour déterminer le second point d'intersection e d'une normale quelconque avec le cercle directeur, il suffit de prendre, à partir du premier point d'intersection b, un arc $b\,e$,

dont la longueur soit n fois celle de l'arc a b. De là un procédé très simple pour tracer les normales d'une épicycloïde et la courbe elle-même.

Soit K (fig. 3, pl. XXXII) le cercle directeur; supposons que $n = 2$, c'est-à-dire que le rayon du cercle générateur soit la moitié de celui du cercle directeur; à partir de l'origine 0, portons des longueurs égales 01, 12, 13, ... et joignons les points 1 et 3, 2 et 6, 3 et 9, 4 et 12; ces lignes seront des normales de l'épicycloïde et les points d'intersection de ces normales entre elles, 1, II, III, IV ... seront les centres de courbure, à l'aide desquels on pourra tracer les arcs $0\ 1_1$, $1_1\ 2_1$, $2_1\ 3_1$, ... Cette construction est très simple et très pratique.

Tracé d'une hypocycloïde. L'hypocycloïde est la courbe que décrit un point de la circonférence d'un cercle roulant à l'intérieur d'un autre cercle.

Soit K (fig. 4, pl. XXXII) le cercle directeur, à l'intérieur duquel le cercle générateur k a roulé de a en b; si on prend l'arc b m égal à l'arc a b, m sera un point de l'hypocycloïde et m b la normale en ce point; cherchons à déterminer le second point e, où cette normale vient couper le cercle directeur; les deux triangles e C b et m c b sont semblables et donnent:

$$e\,b = \frac{R}{r}\,m\,b = \frac{R}{r}\,a\,b = n \times a\,b$$

en posant $\frac{R}{r} = n$. Par conséquent, pour déterminer le point e, il suffit de prendre, à partir du point a, en sens inverse du mouvement, un arc a e égal à $(n - 1)$ fois l'arc a b. On est ainsi conduit à un tracé très simple de l'hypocycloïde.

Soit, par exemple (fig. 5, pl. XXXII), $n = \frac{R}{r} = 3$

Prenons, à partir du point 0, des longueurs d'arc égales 0 1, 1 2, 2 3, 34 ... et de l'autre côté du même point 0 faisons

$$0\,1_1 = (3 - 1)\,0\,1 = 2 \times 0\,1$$
$$0\,2_1 = (3 - 1)\,0\,2 = 2 \times 0\,2$$
$$0\,3_1 = (3 - 1)\,0\,3 = 2 \times 0\,3$$

. . . .

Joignons les points 1_1, 2_1, 3_1, ... aux points 1, 2, 3 ... et prolongeons ces lignes jusqu'à leur rencontre en II, III, IV ...;

nous obtiendrons à la fois les directions des normales successives et les centres de courbure de l'hypocycloïde. Cette courbe peut être remplacée dès lors par l'ensemble des petits arcs de cercle $0\,a_1$, $a_1\,b_1$ . . .

Si l'on fait $n = 2$, notre construction donne, pour les normales, des lignes parallèles et l'hypocycloïde se réduit au diamètre passant par le point 0.

Développantes. Imaginons un disque terminé par une surface courbe, sur laquelle se trouve fixé, par une de ses extrémités, un fil parfaitement flexible, mais inextensible; si on vient à développer ce fil, de telle sorte qu'il reste toujours tendu, son extrémité libre décrira une courbe qu'on appelle la développante de la courbe primitive, laquelle porte aussi le nom de développée.

Il est clair que le fil, dans l'une quelconque de ses positions, est à la fois tangent à la développée et normal à la développante. Il en résulte que, pour obtenir la série des normales de la développante d'une courbe donnée, il suffit de mener les tangentes à cette courbe, construction facile à réaliser dans la pratique avec une très grande exactitude.

Théorie géométrique des engrenages.

Principes généraux. Si on considère deux arbres parallèles, munis de disques cylindriques, pressés l'un contre l'autre par leurs tranches, et que l'on vienne à donner à l'un des arbres un mouvement de rotation d'une vitesse uniforme, le second arbre prendra également un mouvement de rotation uniforme, à condition toutefois que la résistance, due au mouvement de ce second arbre, ne soit pas trop considérable.

Si les deux disques roulent simplement l'un sur l'autre, sans glissement, leurs vitesses à la circonférence sont égales et, par suite, leurs vitesses angulaires doivent être dans le rapport inverse des rayons. Si on désigne par R et R_1 ces rayons, par ω et ω_1 les vitesses angulaires, par n et n_1 les nombres de tours des deux arbres par minute, enfin par Δ la distance de ces arbres, on aura:

$$\left.\begin{aligned} R + R_1 &= \Delta \\ \frac{R}{R_1} = \frac{\omega_1}{\omega} &= \frac{n_1}{n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

D'où on tire, en considérant Δ, n et n_1 comme des données:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{\Delta}{1 + \frac{n_1}{n}} \\ R &= \frac{\Delta}{1 + \frac{n}{n_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La transmission de mouvement par deux tambours roulant l'un sur l'autre est extrêmement douce et, à ce point de vue. parfaitement appropriée aux exigences de la pratique; mais elle présente deux inconvénients graves, dont le premier tient à ce qu'il peut facilement se produire un glissement de l'une des poulies sur l'autre; en second lieu, ce mode de transmission est complétement inadmissible pour les grandes forces, attendu que, dans ce cas, les poulies devraient être appliquées très énergiquement l'une contre l'autre et qu'il en résulterait, par suite, pour les arbres, des frottements considérables. Si, au contraire, on munit les surfaces des tambours de dents d'une forme régulière, engrenant les unes avec les autres, ces tambours n'ont plus besoin d'être serrés l'un contre l'autre et ils permettent d'obtenir un mouvement identique à celui qui résultait du roulement dans l'hypothèse précédente, c'est-à-dire un mouvement tel que le rapport des vitesses angulaires soit constamment le même. Nous verrons plus loin que le problème des engrenages, ainsi posé, est indéterminé et comporte une infinité de solutions; nous indiquerons, en même temps, les méthodes qui permettent d'arriver à ces solutions. Mais nous devons, dès maintenant, faire remarquer qu'une solution, irréprochable au point de vue géométrique, peut fort bien ne pas l'être au point de vue mécanique; on ne peut, en effet, admettre, dans la pratique, que les systèmes d'engrenages, pour lesquels les frottements ne sont pas trop considérables et où l'usure n'amène pas, dans les profils des dents, des déformations trop sensibles. Il est évident, à priori, que le meilleur système serait celui qui, tout en satisfaisant aux conditions géométriques, indiquées précédemment, correspondrait en même temps au minimum de frottements et de déformations.

Dans les considérations que nous venons d'exposer, nous sommes partis d'un cas particulier, celui où les arbres à relier sont parallèles; mais il arrive fréquemment que les directions des arbres font entre elles un angle plus ou moins considérable;

ces directions peuvent d'ailleurs se couper ou se trouver dans des plans différents. Nous aurons donc à étudier les engrenages: 1°, pour des arbres parallèles; 2°, pour des arbres obliques et dans un même plan; 3°, pour des arbres obliques dans des plans différents. Nous allons commencer par l'étude de quelques types d'engrenages spéciaux aux arbres parallèles, nous passerons ensuite à ceux qu'on emploie pour les arbres obliques et nous terminerons par l'exposé des méthodes les plus générales pour les tracés des engrenages, les arbres occupant, l'un par rapport à l'autre, une position tout-à-fait quelconque.

Premier type. Engrenages à lanterne.

Soient C et c (fig. 6, pl. XXXII) les centres des roues, K et k leurs cercles primitifs, c'est-à-dire deux cercles tangents, décrits des points C et c, avec des rayons inversement proportionnels aux vitesses angulaires des deux arbres. Ces rayons se calculent, d'ailleurs, à l'aide des équations (2) indiquées précédemment. Disposons sur le cercle k, à égale distance les uns des autres, des fuseaux d'un très-petit diamètre 1, 2, 3 ...; sur le cercle K, traçons des dents a b, a_1 b_1, a_2 b_2 ... dont les profils se trouvent déterminés par l'épicycloïde que décrit un point de la circonférence de k roulant sur le cercle K. Nous obtenons ainsi un engrenage rigoureusement exact au point de vue géométrique. Si, en effet, nous imaginons que la dent a b vienne occuper la position a_1 b_1, la tige 1 de l'autre roue sera venue occuper la position 2, qui correspond au point où l'arc d'épicycloïde a_1 b_1 coupe le cercle k; on voit d'ailleurs que, par suite du profil adopté, la longueur a a_1 est bien égale à l'arc 1 2, c'est-à-dire que la forme des dents est convenable.

Pour que le mouvement puisse se produire d'une manière continue, il faut qu'à l'instant où le fuseau de k se trouve en contact avec l'extrémité de la dent du cercle K, il se retrouve en a une nouvelle dent en contact avec un nouveau fuseau. La continuité du mouvement exige donc: 1°, que l'écartement des fuseaux soit égal à celui des dents, c'est-à-dire qu'on ait $a\,a_1 = a_1\,a_2 = \ldots = 1\,2 = 2\,3 = \ldots$; 2°, que le profil a b de la dent ait une longueur au moins égale à celle que décrit un point du cercle k, pendant que ce cercle roule sur le cercle K de l'arc a a_1.

L'écartement entre les fuseaux, ou l'écartement des dents sur les cercles primitifs, porte le nom de *pas*. On peut donc

dire que les conditions de l'engrenage à fuseaux sont: 1°, des divisions de pas égales sur les cercles primitifs; 2°, une longueur de dent au moins égale à l'arc d'épicycloïde, engendré pendant la période de roulement correspondant à un pas.

Le dispositif que nous venons d'indiquer serait incapable de transmettre aucun effort, car les tiges infiniment minces, dont nous avons supposé le cercle k muni, se rompraient sous la pression des dents. Mais si, au lieu de simples tiges, on fait usage de fuseaux d'un certain diamètre et si on dispose les dents de la roue K, de telle sorte que le profil de l'une quelconque d'entre elles soit le profil épicycloïdal décrit par le centre d'un fuseau et déplacé d'une quantité égale au rayon de ce fuseau, on obtient un dispositif qui satisfait à la fois aux conditions géométriques et aux exigences de la pratique. Ce type d'engrenages est représenté fig. 7, pl. XXXII.

$a_1\ c_1\ b_1$ est l'épicycloïde correspondant au fuseau supposé réduit à son axe, $\alpha_1\ \gamma_1\ \beta_1$ la courbe obtenue, en déplaçant tous les points de cette courbe d'une quantité égale au rayon du fuseau; si la dent se terminait exactement au point γ_1, elle ne menerait le fuseau que sur la longueur d'un pas; mais, en réalité, elle se continue au delà de ce point, de telle sorte que l'action de la dent Z_1 sur le fuseau T_1 n'a pas encore cessé, lorsque commence le contact de la dent Z_2 et du fuseau T_2. Il résulte de là que, pour qu'une dent puisse conduire un fuseau, pendant que les deux cercles primitifs roulent l'un sur l'autre, d'un arc d'une certaine longueur, le profil de la dent doit avoir exactement la longueur de la portion d'épicycloïde décrite par le centre du fuseau pendant ce roulement. Les dents sont taillées symétriquement des deux côtés, afin de permettre la transmission du mouvement dans les deux sens. Le raccordement entre deux dents consécutives se fait ordinairement au moyen d'un arc de cercle, dont le diamètre est légèrement supérieur à celui du fuseau, afin d'éviter les arc-boutements qui pourraient se produire; si les profils étaient mathématiquement exacts et l'intervalle des dents précisément égal au diamètre du fuseau, il n'y aurait théoriquement aucun arc-boutement à redouter, mais il faut tenir compte de l'encrassement des dents et de l'interposition accidentelle de petits corps étrangers.

Au point de vue pratique, l'engrenage à lanterne est assez peu satisfaisant, car les fuseaux perdent nécessairement, au bout d'un temps relativement très court, leur forme cylindrique. Pen-

dant qu'une dent passe de la position Z_2 à la position Z_1, le fuseau glisse sur la surface de cette dent, avec une vitesse relative croissante; il suit de là que la pression entre la dent et le fuseau n'est pas constante, qu'elle va en augmentant progressivement. Dans la position Z_1, par exemple, la pression de la dent sur le fuseau est dirigée suivant $a\ \gamma_1\ c_1$; si, du centre C, on abaisse, sur le prolongement de $c_1\ a$, la perpendiculaire C D, la longueur de cette ligne est $R \cos \varphi$. Or, si on désigne par M le moment constant de la force qui fait tourner la roue K, $\frac{M}{R \cos \varphi}$ représentera la pression de la dent sur le fuseau dans la position Z_1. Comme φ va en croissant, à partir de 0, à mesure que la dent s'éloigne de la position Z_2, on voit que la pression entre les parties en contact va elle-même en augmentant. Il en résulte d'abord que les dents fatiguent beaucoup plus, près de leurs extrémités, et qu'elles perdent peu à peu leur profil primitif; d'un autre côté, comme la partie du fuseau qui se trouve en contact avec la dent, pendant la rotation, est extrêmement étroite, il ne tarde pas à se produire une altération de la surface, le fuseau s'aplatit et perd la forme rationnelle qu'il possédait au début. En résumé, l'engrenage à lanterne est exposé à une usure très rapide et n'a, dès-lors, pour la pratique, qu'une assez faible importance.

Deuxième type. Epicycloïde et faces planes.

Soient K et k (fig. 8, pl. XXXII) les cercles primitifs des deux roues, a leur point de contact, a b une section faite, suivant le rayon, dans la roue k. Si on considère a b comme le profil de la dent de la roue k, on obtient le profil de la dent correspondante, dans le cercle K, en traçant l'épicycloïde a c, engendrée en faisant rouler, sur la circonférence primitive K, un cercle de rayon $\frac{1}{2}\ r$; il est d'ailleurs facile de s'assurer de l'exactitude de ce tracé.

Supposons que la dent passe de la position a c à la position $a_1\ c_1$, en agissant sur la partie plane a b; celle-ci restant constamment tangente à l'épicycloïde, nous obtiendrons sa nouvelle position en menant, du point o, une tangente à l'épicycloïde $a_1\ c_1$; mais, comme en vertu de notre hypothèse, cette épicycloïde est engendrée par le roulement du cercle $\frac{1}{2}\ r$ sur K, il en résulte

que la tangente, menée par le point o, doit passer par le point c_1, où la courbe rencontre le cercle $\frac{1}{2}$ r. Il suffit donc maintenant, pour que les formes des dents soient convenables, qu'on ait $a\,d = a\,a_1$. Or, par hypothèse, nous avons $a\,c_1 = a\,a_1$; d'ailleurs $a\,c_1 = \frac{1}{2}\,r \times c_1\,\hat{o}\,a$, $a\,d = r \times d\,o\,a$; mais $d\,o\,a = \frac{1}{2}\,c_1\,o\,a$ par conséquent $a\,c_1 = a\,d$ ou encore $a\,a_1 = a\,d$.

C'est d'après ces principes qu'a été construit l'engrenage, représenté fig. 1, pl. XXXIII, dans lequel on a admis deux dents en prise à la fois.

k et K sont les cercles primitifs des deux roues, a leur point de contact, $\frac{1}{2}$ k et $\frac{1}{2}$ K, deux cercles auxiliaires tangents au même point a, $a\,c_1 = a\,a_1 = a\,c_2 = a\,a_2$ la longueur du pas, $a_1\,c_1$ l'épicycloïde que décrit le point c_1, lorsque le cercle $\frac{1}{2}$ k roule de a en a_1, $d_2\,c_2$ celle que décrit le point c_2 dans le roulement du cercle $\frac{1}{2}$ K, de a en a_2. L'épaisseur de chaque dent, mesurée sur les cercles primitifs, est légèrement inférieure à la moitié du pas. L'exactitude rigoureuse de ce tracé se trouve d'ailleurs démontrée par ce que nous avons dit précédemment.

Il résulte, en effet, de la théorie que nous avons exposée, que le profil a c agit sur a b, de telle manière que la dent Z transmet rigoureusement le mouvement à la dent z, de a en d_1; on démontrerait de la même manière que l'épicycloïde a c, engendrée par le roulement du cercle $\frac{1}{2}$ K, conduirait exactement la section droite a f de a en a_2 et qu'inversement aussi $f_2\,a_2$, agissant sur $e_2\,d_2$, communiquerait un mouvement convenable de z_2 à z. En résumé, l'action complète de deux dents se produit de la manière suivante: les deux dents z_2 et Z_2 viennent en contact en e_2, avant la ligne des centres, à la distance d'un pas; à partir de ce moment, la partie droite $a_2\,e_2$ agit sur $e_2\,d_2$ jusqu'à ce que les dents viennent occuper la position z Z; dans ce mouvement, le point de contact, sur la dent Z_2, s'éloigne de e_2 en a_2, tandis qu'au contraire, sur la dent z_2, il se rapproche de e_2 en d_2. De la position z Z à la position $z_1\,Z_1$, le profil épicycloïdal a c agit sur la partie rectiligne a b et le point de contact passe, sur l'une des dents, de a en c et, sur l'autre, de d_1 en c_1.

Si on voulait construire l'engrenage de telle manière que les deux dents pussent transmettre convenablement le mouvement

sur une longueur d'arc α, en avant de la ligne des centres, et une longueur β, après cette ligne, il suffirait, dans le tracé de la fig. 1, pl. XXXIII, au lieu de prendre les deux arcs $a\,c_1$ et $a\,c_2$ égaux à un pas, de faire $a\,c_1 = \alpha$ et $a\,e_2 = \beta$. D'ailleurs pour que le mouvement soit continu, il suffit, au point de vue géométrique, que la longueur $\alpha + \beta$ soit au moins égale à la longueur d'un pas.

Pour apprécier la valeur pratique de l'engrenage que nous venons de décrire, il convient d'examiner la question de l'usure.

Ici, comme dans les engrenages à lanterne, la pression mutuelle des dents ne reste pas constante; elle est d'autant plus grande que les dents sont plus éloignées de la position moyenne $z\,Z$. Il suit de là que l'usure est très faible pour les parties voisines des cercles primitifs, et que chaque dent tend à prendre la forme représentée par la fig. 2, pl. XXXIII, dans laquelle $f\,a\,c$ est le profil initial exact, $f\,g\,a\,h$ le profil résultant de l'usure. Mais, dans les engrenages que nous étudions ici, cette déformation est bien loin d'avoir la même importance que dans les engrenages à fuseaux; le contact, dans le cas qui nous occupe, ayant lieu entre une surface plane et une surface légèrement courbe, la pression entre deux dents se répartit sur une plus grande surface et, par suite, la pression par centimètre carré se trouve notablement plus faible qu'avec les fuseaux.

Ces considérations suffisent pour montrer les avantages que présentent, pour la pratique, les engrenages épicycloïdaux avec parties droites; nous devons ajouter d'ailleurs que ce sont ceux qu'on emploie le plus généralement.

Troisième type. Engrenages à épicycloïdes et à hypocycloïdes.

Soient K et k (fig. 3, pl. XXXIII) les cercles primitifs des roues, K_1 et k_1 deux autres cercles de diamètres quelconques; ces quatre cercles sont tangents en a et leurs centres se trouvent, par suite, sur la ligne $C\,c$. Prenons $a\,c_1$ et $a\,e_2$ égaux à un pas, faisons rouler le cercle k_1 sur K et dans l'intérieur de k, de même le cercle K_1 sur k et dans l'intérieur de K. Le point c_1 décrit alors (dans le roulement sur K) une épicycloïde $c_1\,a_1$ et (dans le roulement à l'intérieur de k) une hypocycloïde $c_1\,d_1$; de même le point e_2 décrit (dans le roulement sur k) une épicycloïde

$e_2 d_2$ et (dans le roulement à l'intérieur de K) une hypocycloïde $e_2 a_2$.

On a évidemment $a\,c_1 = a\,d_1 = a\,a_1$ et $a\,e_2 = a\,a_2 = a\,d_2$; les arcs $c_1 d_1$ et $c_1 a_1$ sont tangents en c_1 et les arcs $a_2 e_2$ et $e_2 d_2$ tangents en e_2, car la corde $c_1 a$ est normale en c_1, à la fois à l'épicycloïde et à l'hypocycloïde, de même que la corde $a\,e_2$ en e_2. Si on complète le tracé en répétant les profils, on obtient le type d'engrenages représenté fig. 3, pl. XXXIII. Il est facile de s'assurer que ce dispositif remplit bien les conditions voulues. En effet, non seulement pour la position des dents figurée sur le dessin, mais encore pour toute autre, on a constamment $a\,c_1 = a\,a_1$ et $a\,c_2 = a\,d_2$

Si maintenant on suit le mouvement de deux dents, pendant tout le temps qu'elles sont en prise, on voit que de Z_2 à Z l'hypocycloïde $a_2 e_2$ agit sur l'épicycloïde $e_2 d_2$; de z à z_1, au contraire, l'épicycloïde a c agit sur l'hypocycloïde a b.

Au point de vue de l'usure. ce type d'engrenages est à peu près aussi satisfaisant que le précédent.

Si on veut que l'engrenage soit disposé de manière à ce que les dents, au lieu d'être en prise sur la longueur de deux pas, le soient sur un arc α, avant la ligne des centres, et sur un arc β après, il suffit de prendre $a\,c_1 = \beta$, $a\,e_2 = \alpha$ et d'achever la construction comme nous venons de l'indiquer plus haut.

Quatrième type. Engrenage avec développantes de cercle.

On peut encore obtenir un tracé d'engrenages satisfaisant, en adoptant, pour les profils des dents, les développantes de deux cercles, dont les rayons soient dans le rapport inverse des vitesses angulaires des deux roues.

La fig. 4, pl. XXXIII, permet de le démontrer aisément. Dans cette figure, K et k sont deux cercles dont les rayons satisfont à la condition que nous venons d'indiquer; c C est la ligne des centres et T t la tangente commune. Si ces deux cercles sont munis de profils de dents, tracés au moyen des développantes qu'on obtient en déroulant les cercles K et k en sens inverse et si, de plus, ces dents se touchent, leur point de contact doit se trouver sur la tangente commune T t; en effet, si, par le point de contact des développantes, on mène les normales. ces lignes doivent coïncider et, comme la normale à chaque développante doit être tangente au cercle correspondant, il s'ensuit que

le point de contact des développantes ne peut se trouver que sur la tangente commune T t.

Si donc e b et e_1 b_1 sont deux positions consécutives d'une dent de la roue k, *f* g et f_1 g_1 les positions correspondantes de la dent de la roue K, d et d_1 seront les points de contact des deux dents. Maintenant b b_1 et *f* f_1 sont les chemins parcourus par ces dents pendant le même temps et ces chemins sont égaux, car on a b b_1 = d d_1 et *f* f_1 = d d_1

Le mouvement des cercles, dû à l'action mutuelle des dents, est donc tel qu'un point de la périphérie de K parcourt un chemin égal à celui du point correspondant de la périphérie de k; en d'autres termes, les vitesses à la circonférence sont égales pour les deux roues et, par suite, les vitesses angulaires des deux cercles sont en raison inverse de leurs rayons. Le mouvement est donc identique à celui qu'on obtiendrait si les deux cercles K et k étaient tangents et roulaient l'un sur l'autre.

La fig. 5, pl. XXXIII, représente un tracé d'engrenages par développantes, dans lequel les dents restent en prise pour un arc double du pas.

t a = a b représente le pas; l'arc de développante des dents z, z_1, z_2 . . . correspond donc au développement d'un arc du cercle k, dont la longueur est double du pas. L'arc de développante des dents Z, Z_1, Z_2 . . . correspond au développement d'un arc du cercle K, ayant une longueur égale à T t. Si le mouvement s'effectue comme l'indiquent les flèches, le contact s'établit pour deux dents, lorsqu'elles atteignent les positions Z et z; il cesse quand elles sont en Z_2 et z_2; dans la position intermédiaire Z_1 z_1, le point de contact coïncide avec le point d'intersection a des lignes C c et T t, point qui partage la ligne des centres en raison inverse des vitesses angulaires des roues.

Pour que les dents restent en prise pour un arc exactement double du pas, il faut que les rayons des cercles k et K aient des longueurs parfaitement déterminées, qu'on peut trouver de la manière suivante.

On trace l'angle x c y (fig. 6, pl. XXXIII), qui correspond à un pas pour la denture du cercle k et, avec un rayon arbitraire, c u = c v, on décrit un arc u v, on mène la tangente u v et, sur cette ligne, à partir du point u, on porte une longueur u w, égale à l'arc développé u v. On trace ensuite la ligne c w et, sur cette ligne prolongée, on porte, à partir du point c, la distance des axes c C. On partage cette ligne au point a en

deux parties, inversement proportionnelles aux vitesses angulaires que doivent avoir ces deux axes; du point a on abaisse sur c y la perpendiculaire a t et, sur cette dernière ligne prolongée, on mène, du point C, la perpendiculaire C T; les longueurs c t = k et C T = K sont les rayons des cercles générateurs des développantes. On peut vérifier l'exactitude de ce procédé, en comparant les figures 5 et 6, dont la première représente terminée la construction qui est simplement indiquée dans la seconde.

Comme l'angle x c a est toujours très petit, on peut le négliger par rapport à a c t, et déterminer les rayons k et K, avec une exactitude suffisante, au moyen d'une construction très simple. On trace la ligne des centres C c (fig. 7) et on la divise, en a, en deux parties inversement proportionnelles aux vitesses angulaires des roues; on mène la ligne c y, faisant avec la ligne C c l'angle C c y, correspondant à un pas pour la roue k; du point a, on abaisse une perpendiculaire a t_1 sur c y_1 et, du point C, une perpendiculaire C T_1 sur a t_1 prolongé. On a ainsi approximativement C T_1 = K, c t_1 = k. Si, avec ces rayons approchés, on continue la construction indiquée précédemment, on obtient, en définitive, un tracé d'engrenages parfaitement rigoureux, mais dans lequel le contact des dents, au lieu de correspondre exactement à une longueur double du pas, a une durée très légèrement inférieure, ce qui ne présente aucun inconvénient dans la pratique.

Si on voulait obtenir des engrenages tels que le contact de deux dents ait lieu sur un arc α, en avant de la ligne des centres, et sur un arc β, après cette ligne, il suffirait de répéter la construction graphique applicable au contact pendant deux pas, en ayant soin de prendre a t = α et de faire x c t égal à l'angle qui correspond à l'arc α; de plus, la longueur des dents devrait être déterminée, pour la position z_2, avec a b = β.

Les engrenages à développantes de cercles, construits d'après les principes que nous venons d'exposer, présentent, au point de vue pratique, des avantages importants:

1°, Toutes les roues à développantes de cercle, et de même pas, peuvent se commander mutuellement d'une manière précise. Il suffit, pour s'en convaincre, de rappeler que la forme d'une dent, dans ce cas, est simplement fonction du cercle dont le roulement engendre la développante. Avec les engrenages épicycloïdaux, cette propriété n'existe pas, car la forme de la dent dépend, non seulement de la grandeur de l'angle du pas de la

roue à laquelle elle appartient, mais encore de la grandeur du même élément pour la seconde roue. Si donc une roue d'engrenage doit conduire plusieurs autres roues, de diamètres inégaux, il convient de recourir au tracé avec développantes.

2°, La distance des axes des deux roues peut varier entre certaines limites, sans que les dents cessent d'être convenablement en prise; cet écartement des axes a simplement pour effet de modifier la durée du contact. C'est ce qui résulte de la construction, indiquée page 336, où la distance des axes n'intervient pas. Pratiquement, cette propriété a le grand avantage de faciliter beaucoup le montage des transmissions, en permettant une petite variation dans les distances d'axes. Au contraire, les engrenages épicycloïdaux doivent être établis avec une très grande précision, de façon à ce que les cercles primitifs soient exactement tangents; ce n'est qu'à cette condition que la transmission de mouvement est satisfaisante.

3°, L'usure n'entraine que des déformations très peu sensibles pour les dents à développantes. Cette propriété importante tient à ce que, dans les dentures de ce genre, la pression mutuelle des dents en prise conserve, pendant toute la durée du contact, une valeur constante; cette pression est, en effet, dirigée suivant la tangente T t; elle a, par suite, pour valeur numérique $\frac{M}{R}$, M désignant le moment statique de la force qui fait tourner l'axe C et R le rayon du cercle K. La pression restant constante, la dent prend, par l'usure, un profil qui forme une ligne équidistante du profil primitif et n'en diffère, en réalité, qu'extrêmement peu.

4°, Tous les profils à développantes sont géométriquement semblables et peuvent être, par suite, facilement exécutés au moyen de machines spéciales.

En dehors des quatre propriétés principales que nous venons d'énumérer, les engrenages par développantes en possèdent encore un certain nombre d'autres, assez importantes, mais qui sont plus difficiles à justifier théoriquement. Ce type d'engrenages, auquel on ne connait d'ailleurs aucun inconvénient, doit donc être employé de préférence à tous les autres.

Cinquième tracé. Méthode générale.

Lorsqu'on se donne un profil arbitraire pour les dents d'une roue, il est toujours possible de déterminer la forme qu'il con-

vient de donner aux dents d'une seconde roue, destinée à engrener avec la première. On procède alors de la manière suivante:

Soient C c (fig. 1, pl. XXXIV) les centres des roues, K et k les cercles primitifs, a leur point de contact, a m p une courbe, de forme quelconque, représentant le profil d'une dent de k. Prenons sur a p un point m et menons la normale à la courbe en ce point; sur la circonférence K, à partir du point a, prenons l'arc $a\ n_1 = a\ n$, par le point n_1 menons une droite, qui coupe le cercle K, sous un angle égal à celui du cercle k avec la normale m n, et faisons enfin $n_1\ m_1 = n\ m$; le point m_1 sera un point de la courbe $a\ m_1\ p_1$, qu'on doit prendre pour le profil des dents de la roue K. En répétant la construction pour plusieurs points de a m p, on obtiendra autant de points qu'on le voudra pour tracer la courbe $a\ m_1\ p_1$.

Il est facile de démontrer l'exactitnde de cette construction; imaginons que les roues K et k tournent autour de leurs axes, jusqu'à ce que les points n et n_1 viennent coïncider, les lignes m n et $m_1\ n_1$ coïncideront également, car ces lignes sont d'égale longueur et les angles, sous lesquels elles coupent les cercles K et k, sont égaux.

Mais si les lignes m n et $m_1\ n_1$ coïncident, les courbes se touchent aux point m et m_1, c'est-à-dire que les deux dents se trouvent en prise et peuvent se commander. Comme, d'un autre côté, $a\ n = a\ n_1$, les profils tracés ont la propriété, en partant d'une position de contact, de passer à autre position de contact, si on fait tourner d'un même arc les circonférences primitives; or, c'est précisement là la propriété caractéristique d'un engrenage.

On peut aussi renverser la construction, en partant du profil convexe $a\ m_1\ p_1$ pour déterminer le profil concave a m p. Mais, dans ce cas, à une courbe convexe donnée ne correspond pas toujours une courbe concave convenable; il faut que la première ait une courbure suffisante, pour que toutes les normales $m_1\ n_1$ rencontrent le cercle K. Si l'on prend, pour la courbe $a\ m_1\ p_1$, un arc de développante du cercle K, toutes les normales à cette courbe seront tangentes au cercle. La développante est donc, à ce point de vue, une courbe limite et toute courbe d'une convexité moindre n'aura pas de courbe concave correspondante.

Tracé des dents par arcs de cercles.

A chaque méthode de tracé rigoureux d'un profil de dent d'engrenage, on peut substituer un tracé approximatif, par arcs de cercles, et il existe une méthode générale qui permet d'obtenir les rayons les plus convenables à adopter.

Si, en effet, on considère un profil de dent, mathématiquement exact, et qu'on cherche la valeur moyenne du rayon de courbure, pour l'arc total qui forme la dent, ce rayon pourra servir à tracer un arc de cercle, susceptible d'être substitué à la courbe exacte. Nous allons appliquer ce procédé au type d'engrenages à profils droits et épicycloïdaux, en commençant d'abord par établir les équations d'une épicycloïde.

Soit a m (fig. 2, pl. XXIV) l'arc d'épicycloïde, décrit par le point m du cercle k, pendant que ce dernier a roulé, de a en b, sur le cercle K.

Prenons C a x comme axe des abscisses et désignons par A et a les rayons des cercles K et k, par x et y les coordonnées d'un point m de l'épicycloïde; posons, de plus, $\frac{A}{a} = i$, $aCb = \psi$ et nous trouverons alors facilement, pour x et y, les relations:

$$\left.\begin{aligned} x &= (A + a)\cos\psi - a\cos(i + 1)\psi \\ y &= (A + a)\sin\psi - a\sin(i + 1)\psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

On en déduit, pour le rayon de courbure au point m:

$$\varrho = 4a\,\frac{i + 1}{i + 2}\sin\frac{1}{2}\,i\,\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

cette expression se trouve d'ailleurs sans peine, en partant du procédé rigoureux que nous avons indiqué précédemment pour le tracé de l'épicycloïde.

Cela posé, si on désigne par ϱ_m le rayon moyen de courbure de l'arc d'épicycloïde, défini par l'angle α, on a, d'après la définition même de la valeur moyenne:

$$\varrho_m = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \varrho\, d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ou, en tirant la valeur de ϱ de la relation (2):

$$\rho_m = 4 \frac{a}{\alpha} \frac{i+1}{i+2} \int_0^\alpha \sin \frac{1}{2} i \psi \, d\psi$$

expression qui, par intégration, donne:

$$\rho_m = 8 \frac{a}{\alpha} \frac{i+1}{i(i+2)} \left[1 - \cos \frac{1}{2} i \alpha\right]$$

Ou encore, en remarquant que $1 - \cos \frac{1}{2} i \alpha = 2 \sin^2 \frac{1}{4} i \alpha$:

$$\rho_m = 16 \frac{a}{\alpha} \frac{i+1}{i(i+2)} \sin^2 \frac{1}{4} i \alpha \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Comme, dans tous les tracés d'engrenages, $\frac{i \alpha}{4}$ est une quantité très petite, on ne commet pas d'erreur sensible, en posant:

$$\sin \frac{1}{4} i \alpha = \frac{1}{4} i \alpha, \ \sin^2 \frac{1}{4} i \alpha = \frac{1}{16} i^2 \alpha^2$$

on trouve alors:

$$\rho_m = a i \alpha \left(\frac{i+1}{i+2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Prenons, comme application, le cas d'un profil à flancs droits et à épicycloïde.

Soient R et r les rayons des cercles primitifs, t la longueur du pas, $\frac{R}{r} = n$, et supposons que le contact de deux dents doive commencer un pas avant la ligne des centres, pour cesser un pas également après cette ligne; on doit poser, dans ce cas, pour les dents de la roue R:

$$i = \frac{R}{\frac{1}{2} r} = 2n, \quad a i \alpha = t$$

L'expression (5) donne alors:

$$(\rho_R) = t \frac{2n+1}{2n+2}$$

Pour les dents de la roue r, on doit prendre:

$$i = \frac{r}{\frac{1}{2} R} = \frac{2}{n}, \quad a i \alpha = t$$

Par suite:

$$(\rho_r) = t \frac{2 + n}{2 + 2n}$$

Ce sont les valeurs qu'on emploie pour le tracé de ces engrenages par arcs de cercles.

La méthode à suivre, pour ce tracé, est analogue à celle que nous avons indiquée précédemment pour le second type d'engrenages. On commence par tracer les quatre cercles K, k, $\frac{1}{2}$ K, $\frac{1}{2}$ k (fig. 3, pl. XXIV); on prend $a c_1 = a a_1 = a c_2 = a d_2 =$ la longueur du pas. Puis, avec une ouverture de compas égale à (ρ_R), et des points a_1 et c_1 comme centres, on décrit des arcs de cercles qui, par leur intersection, déterminent le point qu'on doit prendre comme centre, pour décrire, avec le rayon (ρ_R), le profil approché $a_1 c_1$.

Si, d'un autre côté, avec le rayon (ρ_r), et des points e_2 et d_2, on décrit deux arcs de cercles, leur intersection donnera le centre du profil $e_2 d_2$, ayant pour rayon (ρ_r). Pour déterminer les centres des arcs de toutes les autres dents, il suffit de faire passer, pas les centres des arcs $a_1 c_1$ et $e_2 d_2$, deux cercles concentriques, respectivement à K et k, de tracer, des points de division $a_1 a_2 \ldots$ du cercle K, avec un rayon égal à (ρ_R), des arcs qui, par leurs intersections avec le premier des cercles concentriques, déterminent une première série de centres; la seconde s'obtient, de la même manière, en prenant les points d'intersection du second cercle et des arcs décrits, des points de division d_1, $d_2 \ldots$ du cercle k, avec une ouverture de compas égale à (ρ_r). Quant aux flancs droits de chaque dent, ils s'obtiennent simplement, en menant les tangentes aux arcs de cercle formant l'autre partie de la dent. Enfin les cercles limites, sur lesquels se trouvent les points $b_2 \ldots$ et f_1, se déterminent d'après les longueurs des dents.

Tracé des engrenages coniques.

Soient S C O et s c O (fig. 4, pl. XXXIV) deux axes qu'il s'agit de relier par des roues coniques. Par lenr point de rencontre O, tracons une ligne O x, telle qne les distances A C et A c d'un point quelconque A de cette ligne à O S et O s soient en raison inverse des vitesses angulaires des arbres. Au point A

menons sur O x une perpendiculaire, qui rencontre ces axes en S et s; nous obtenons ainsi les triangles S C A, C A O, A s c et A O c. Si on suppose ces figures animées d'un mouvement de rotation autour des axes O S et O s, on obtiendra deux doubles cônes E, G et e, g. Les cônes G et g, qui sont tangents le long de la génératrice A O, prendront le nom de cônes primitifs et nous appellerons cônes complémentaires les deux cônes E et e, qui ont un plan tangent commun le long de la ligne S A s.

Si on suppose les deux cônes primitifs pressés l'un contre l'autre et qu'on fasse tourner l'un d'eux autour de son axe, le second cône, en raison du frottement, prendra également un mouvement de rotation autour de son axe, et il est facile de reconnaitre que les vitesses angulaires de ces deux mouvements seront en raison inverse des rayons A C et A c. Si, maintenant, on imagine les deux cônes G et g, munis de dents à profils convenables, l'action mutuelle de ces dents pourra communiquer aux cônes un mouvement identique à celui qui était produit par le simple roulement de ces deux cônes l'un sur l'autre. La forme, mathématiquement exacte, de ces dents est extrêmement compliquée, mais on peut obtenir assez simplement, de la manière suivante, un tracé approximatif, bien suffisant pour les besoins de la pratique.

Les dents ne se trouvent en prise que dans le voisinage de la ligne S A s. Or, si on examine spécialement ce qui se passe pendant l'action mutuelle de ces dents, on voit que les phénomènes, dus à la rotation des cônes, sont très-sensiblement ceux que produiraient deux roues droites, dont les rayons seraient les côtés S A et s A des cônes complémentaires. Cette assimilation serait parfaitement exacte si le temps, pendant lequel les dents restent en prise, était infiniment petit; comme cette durée a, en réalité, une valeur finie, l'assimilation ne peut être qu'approchée. Néammoins on peut, sans erreur sensible pour la pratique, admettre que la forme des dents d'un engrenage conique est la même que celle des dents d'un engrenage droit, dont les roues auraient pour rayons les longueurs des génératrices des cônes complémentaires. Cette assimilation établie, on pourra, suivant les circonstances, adopter, pour les dents, l'un ou l'autre des types, dont nous avons fait précédemment connaitre les tracés.

Méthodes générales pour la détermination des surfaces de dents.

Il existe deux méthodes, tout-à-fait générales, qui permettent d'obtenir des tracés, géométriquement exacts, non seulement pour les roues droites ou coniques, mais encore pour les engrenages dont les axes ne se coupent pas et sont dirigés d'une manière tout-à-fait quelconque. Nous allons exposer successivement chacune de ces deux méthodes.

Imaginons deux axes C et C_1, qui forment entre eux un angle quelconque et ne se coupent pas; supposons que l'un de ces axes, C par exemple, soit muni d'une dent F, dont la surface a une forme tout-à-fait quelconque, et choisissons un système de coordonnées rectangulaires $O x_1$, $O y_1$, $O z_1$, tel que l'axe des z_1 coincide avec l'axe C_1. Si on fait tourner les axes C et C_1, de telle sorte que le rapport des vitesses angulaires conserve une valeur constante, assignée à l'avance, la surface de la dent F tournera autour de l'axe C, en même temps que le système des axes de coordonnées autour de C_1 et, par rapport à ce système, la surface F occupera, à chaque instant du mouvement, une certaine position relative. Si, maintenant, on considère la surface enveloppe (F_1) de toutes les positions relatives de la surface F, par rapport au système d'axes de coordonnées, cette surface F_1 n'est évidemment autre chose que la forme de dent dont doit être muni l'axe C_1, pour que l'action réciproque des dents F et F_1 reproduise le mouvement considéré. Il est facile de reconnaitre que c'est sur ce procédé que reposent quelques-uns des tracés spéciaux, que nous avons étudiés précédemment, ceux notamment qui se rapportent aux premier, deuxième et cinquième types d'engrenages. Dans le premier type, la surface de dent, solidaire de l'un des axes, est une tige mince et la surface F_1 de la dent du second axe est la surface enveloppe, engendrée par cette tige, quand les deux axes sont animés d'un mouvement convenable.

Dans le second type, la surface de la dent F se réduit à une section plane, faite suivant le rayon; la surface enveloppe F_1, due au mouvement relatif de ce profil, par rapport à la seconde roue, n'est autre chose qu'une surface épicycloïdale. Enfin, dans le cinquième type, F est une surface cylindrique, avec une section courbe quelconque, et F_1 n'est autre chose que la surface enveloppe, engendrée dans le mouvement de F, par rapport au second axe.

Les dents à développantes peuvent être considérées comme des surfaces enveloppes, engendrées par le monvement d'un plan par rapport aux deux roues; ce plan, perpendiculaire à la tangente commune T t (fig. 5, pl. XXXIII), étant supposé se mouvoir, le long de cette tangente, avec une vitesse égale à la vitesse à la circonférence de k et K. Ce mode de génération des dents à développantes fournit une indication qu'on peut utiliser pour la construction de machines propres à tailler les dents de cette espèce; il suffit, en effet, d'imaginer une machine à mortaiser, dans laquelle le burin, en dehors de son mouvement vertical alternatif, soit animé d'un mouvement de translation suivant une ligne droite (suivant la ligne T t de la fig. 5, pl. XXXIII); à chaque avance du burin, la roue elle-même doit tourner d'un angle proportionné. Pour les engrenages cylindriques, cette idée peut se réaliser d'une manière très simple et dans de bonnes conditions de solidité; pour les roues coniques, au contraire, la machine exige de telles complications qu'on ne peut guère en attendre un travail suffisamment précis.

Passons maintenant à la seconde méthode, également tout-à-fait générale, qn'on peut employer pour les tracés des surfaces de dents.

Imaginons deux systèmes de coordonnées $O\,x\,y\,z$ et $O\,x_1\,y_1\,z_1$, ayant pour axes des z et des z_1, le premier l'axe C et le second l'axe C_1.

Si on suppose que chacun des axes C et C_1 tourne, suivant une certaine loi, en entrainant les axes de coordonnées et qu'une surface quelconque M se meuve en même temps dans l'espace, suivant une loi arbitraire, les positions successives de la surface M, par rapport aux deux systèmes de coordonnées, formeront deux surfaces enveloppes, qui seront des surfaces de dents, géométriquement exactes, ponr les deux axes C et C_1. Comme la forme de la surface M, ainsi que la loi de son mouvement, sont complétement arbitraires, on voit qu'on peut obtenir des formes de dents satisfaisantes en nombre infini.

Les nombrenses variétés d'engrenages, correspondant à ces formes de dents, peuvent se diviser en deux classes principales: la première comprend tous les types dans lesquels les dents, pour chaque position des axes, se touchent suivant une ligne, droite ou courbe, et la seconde, tous ceux dans lesquels les dents, à tous les moments de leur action mutuelle, ne se touchent que par un seul point. Les engrenages de la première espèce

servent à transmettre des forces considérables, et on les désigne sous le nom d'engrenages de force, tandis que ceux de la seconde classe ne penvent supporter que de très faibles efforts, et constituent ce qu'on appelle des engrenages de mouvement. Dans les premiers, la surface entière de la dent travaille, tandis que dans les seconds, la série des points de contact successifs forme une seule ligne, droite ou courbe. Dans les engrenages de force, les dents glissent les unes sur les autres et prennent de l'usure; dans les engrenages de mouvement, les dents roulent, l'une sur l'autre, en même temps qu'elles tournent, à chaque instant, autour de la normale passant par le point de contact; ces derniers engrenages ne donnent donc naissance à aucun frottement, quand on les considère au point de vue théorique, c'est-à-dire en faisant abstraction de l'élasticité de la matière.

Ce second procédé général, pour déterminer les formes des dents, a une grande importance pratique, en ce sens qu'il indique clairement la marche à suivre, pour arriver à établir des machines propres à tailler convenablement les dents. Si on monte sur l'axe d'un tour une roue K, qui partage le mouvement uniforme de rotation de l'axe, si on prend en même temps un outil M, de forme convenable, et qu'on le fasse mouvoir d'une manière déterminée, cet outil entaillera la roue K suivant une surface enveloppe F.

Si, d'un autre côté, on monte sur le tour le corps K_1 de la seconde roue et qu'on fasse agir, sur cette roue, un outil M_1, qui soit, par rapport à l'outil M, ce qu'est un écrou par rapport à sa vis, ce second outil déterminera, dans la roue K_1, une nouvelle surface enveloppe F_1; les deux surfaces F et F_1 donnent des formes convenables pour les dents des deux roues.

La première des deux méthodes générales peut d'ailleurs servir elle-même pour la taille des dents et, en réalité, on l'emploie déjà depuis longtemps pour tailler les dents des roues engrenant avec des vis sans fin. Supposons qu'on établisse deux vis identiques E et S, la première en fer, la seconde en acier, et que la vis S soit munie d'entailles et de parties tranchantes, comme les tarauds, destinés à la fabrication des écrous. Imaginons maintenant qu'on appuie la vis S contre la roue K, et qu'on donne aux pièces K et S un mouvement identique à celui qui résulterait de la commande de la roue par la vis, si cette roue était taillée; on obtiendra, de cette manière, dans la roue des entailles, qui ne sont autre chose que des surfaces enveloppes;

lorsque cette opération est terminée sur toute la circonférence, les dents se trouvent avoir la forme convenable, pour engrener avec les filets de la vis sans fin E, qu'on peut mettre à la place de la vis en acier.

Construction des dents d'engrenages.

La construction des roues dentées varie avec la grandeur des pièces et la nature des matériaux employés. A ces deux points de vue on doit distinguer:

1°, les petites roues de cuivre ou de bronze,
2°, les petites roues en fonte,
3°, les petites roues en fer forgé,
4°, les grandes roues en fonte, avec dents de même métal,
5°, les grandes roues en fonte, avec dents en bois rapportées.

Les roues de cuivre ou de bronze se fondent pleines; après les avoir tournées, on découpe les dents, soit avec un outil qui remplit l'intervalle de deux dents, soit avec une fraise tournante, qui, en section, a précisément la forme du vide à ouvrir; le premier procédé est préférable, quand on n'a qu'une seule roue à construire; mais il convient de recourir au second, lorsqu'il s'agit d'établir un grand nombre de pièces identiques. L'outil, nécessaire dans le premier cas, s'établit sans difficulté, mais travaille lentement; la fraise, dont l'exécution coute beaucoup plus cher, travaille aussi beaucoup plus vite. Du reste, au lieu d'une fraise, on peut employer tout autre outil tournant.

Les petites roues en fonte sont moulées sur des modèles en bronze, préparés comme nous venons de l'indiquer.

Pour les roues en fonte d'une certaine grandeur, avec dents adhérentes à la couronne, on fait usage de modèles en bois, ayant exactement la forme définitive que doit présenter la roue.

Pour établir les dents d'un modèle, on commence par construire, en se servant des notions précédentes, un calibre en tôle donnant le profil exact des dents. Ce calibre une fois terminé, on dessine chaque dent sur le modèle, en suivant les contours de la tôle et on la taille à l'aide de la scie, du rabot et de la lime. Pour établir un calibre, on peut faire le tracé géométrique exact ou recourir à des procédés auxiliaires. Ainsi, pour tracer une épicycloïde, on peut, par exemple, découper deux cercles en tôle, les faire rouler l'un sur l'autre et, à l'aide d'un pointeau,

figurer, sur une feuille de tôle, la courbe décrite par un point du cercle roulant.

Pour tracer une développante, on peut découper un cercle de tôle au diamètre du cercle primitif, fixer, en l'un de ses points, un ressort de pendule, qu'on laisse se dérouler, et dont l'extrémité permet de tracer, sur le gabarit, la développante qu'elle décrit. Une fois le modèle achevé, on établit le moule et on le remplit de métal en fusion.

Pour construire les roues en fonte, avec dents en bois, on commence par établir le corps de la roue, ce qui n'offre aucune difficulté, puis on fixe, sur la couronne, les morceaux de bois, qui doivent former les dents. Ces pièces sont calées, tournées, puis, sur chacune d'elles, on trace, au moyen d'une calibre, le profil qu'elle doit avoir définitivement et qu'on lui donne, comme nous l'avons indiqué pour les modèles.

Pour les petites roues, dont les dents se taillent à la machine, on commence par diviser le cercle très exactement, à l'aide d'un plateau spécial, dont sont toujours munies les machines à tailler les engrenages.

Quant aux grandes roues, leur division s'effectue généralement par tâtonnements, à l'aide d'un compas; il est évident que cette méthode est un peu primitive et que, suivant les opérateurs, elle peut donner des résultats plus ou moins satisfaisants.

CINQUIÈME SECTION.

Des mécanismes de mouvement.

Introduction.

Les différentes pièces, qui composent les machines, se divisent en pièces fixes et en pièces mobiles; les premières servent de points d'appui pour les secondes et constituent les supports, paliers, guides et bâtis. Les pièces mobiles servent à propager, transmettre, transformer et régulariser les mouvements. Dans ce chapitre nous nous occuperons spécialement des mécanismes de transformation et de régularisation. Un mécanisme, ayant pour but de transformer un mouvement en un autre mouvement, comprend, au moins, deux pièces, susceptibles d'exécuter chacune un mouvement simple déterminé, et qui sont reliées entre elles, de telle sorte que le déplacement de l'une entraine forcément celui de l'autre.

Les mouvements simples des pièces élémentaires des machines comprennent:

1°, le mouvement continu en ligne droite, a,
2°, le mouvement rectiligne alternatif, b,
3°, le mouvement circulaire continu, c,
4°, le mouvement circulaire alternatif, d.

En dehors de ces mouvements simples, il en existe d'autres qui se produisent suivant des courbes quelconques, mais nous nous dispenserons d'en tenir compte ici, attendu que les mouvements de cette nature ne s'emploient qu'à titre tout-à-fait exceptionnel.

Les quatre types de mouvements simples, que nous venons d'énumérer, permettent les zeize transformations de mouvement suivantes:

a en a ou en b, c, d
b „ b „ „ a, c, d
c „ c „ „ a, b, d
d „ d „ „ a, b, c

il est évident, en outre, que chacune de ces seize espèces de transformation peut donner elle-même un nombre indéterminé de variétés.

Nous allons décrire un grand nombre de transformations de mouvements en usage dans la pratique, en nous bornant à l'étude théorique de quelques-unes. Nous ne nous astreindrons pas à suivre l'ordre indiqué par les combinaisons précédentes et nous en adopterons un plus rationnel, au point de vue de l'étude. Nous commencerons donc par la description des types qu'on rencontre le plus fréquemment en mécanique, à savoir la transformation du mouvement circulaire continu, soit en un autre mouvement circulaire continu, soit en un mouvement rectiligne alternatif.

Engrenages.

Pour transformer le mouvement de rotation continu d'un arbre en un mouvement de rotation, également continu, d'un second arbre, on fait généralement usage de roues d'engrenages. Nous avons indiqué précédemment, avec tous les détails nécessaires, les divers tracés usités pour la construction des dents; il nous suffira donc de décrire les différents modes d'assemblage de roues, auxquels on a recours dans la pratique.

Eugrenages cylindriques ordinaires pour deux arbres parallèles.

Fig. 5, pl. XXXIV. Les propriétés caractéristiques de ce mode de transformation consistent en ce que: 1°, les vitesses à la circonférence sont égales; 2°, les rotations ont lieu en sens contraire; 3°, les nombres de tours par minute sont en raison inverse des rayons ou du nombre des dents des roues.

Engrenages coniques ordinaires pour deux arbres qui se rencontrent.

Fig. 6, pl. XXXIV. Propriétés géométriques identiques à celles des engrenages cylindriques.

Transmission par engrenages avec roue intermédiaire.

Fig. 7, pl. XXXIV. a et c sont deux roues dentées, reliées par une troisième roue, également dentée, b; cette dernière roue n'a aucune influence sur les vitesses relatives des roues a et c, mais elle agit sur le sens de leurs rotations. Si les roues a et c se commandaient directement, elles tourneraient en sens inverse, tandis qu'avec une roue intermédiaire elles tournent dans le même sens. Il en est de même, toutes les fois que les deux roues sont reliées par un nombre impair d'engrenages intermédiaires.

Transmission avec deux roues intermédiaires.

Fig. 8, pl. XXXIV. a et d sont deux roues cylindriques, entre lesquelles sont établis les engrenages intermédiaires b et c; dans ce cas, le rapport des vitesses des roues a et d et le sens de leurs rotations sont exactement les mêmes que si ces roues se commandaient directement. L'emploi de plusieurs roues intermédiaires n'est admissible que dans le cas où la distance des arbres à relier est trop considérable et où on ne pourrait adopter, sans inconvénient, des roues d'un trop grand diamètre. Il est évident que les mêmes propriétés subsistent, toutes les fois que les roues intermédiaires sont en nombre pair.

Réunion par un arbre intermédiaire de deux arbres qui ne se coupent pas.

Fig. 1, pl. XXXV. a et b sont deux arbres qui ne se coupent pas, et qui font d'ailleurs un angle quelconque, c un arbre intermédiaire, qui coupe à la fois les deux arbres a et b; d et e sont deux roues coniques, reliant les arbres a et c: *f*, g sont deux autres roues, également coniques, établies sur les arbres c et b.

Compteur à engrenages.

Fig. 2, pl. XXXV. a est un arbre animé d'un mouvement de rotation rapide, dont on veut compter le nombre de tours; sur cet arbre est calé un pignon b, engrenant avec deux roues dentées c et d, dont la première c est calée sur l'arbre *f* et la seconde folle sur cet arbre. Le nombre des dents de la roue d est supérieur d'une unité à celui des dents de la roue c. e est un index, fixé sur l'arbre *f*, et qui se meut devant une graduation que porte la roue d. Quand l'index e, dans son mouvement relatif, a fait le tour entier du cadran de d, le nombre de tours, effectué par l'axe a, a pour mesure, comme il est facile de le vérifier:

$$\frac{Z\,(Z+1)}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Z, Z + 1 et z représentant les nombres de tours des roues c, d et b.

D'après cela, on voit qu'il suffit de diviser le cadran de d en autant de parties que l'expression (1) renferme d'unités, pour qu'une division corresponde à un tour de l'arbre a.

Roues à vis pour relier des arbres perpendiculaires.

Fig. 3, pl. XXXV, plan; fig. 4, élévation.

Roues à vis pour arbres parallèles.

Fig. 5, pl. XXV. Les dents de chacune de ces roues d'engrenages sont les surfaces enveloppes qu'on obtient, lorsque le tranchant d'un outil se meut suivant une certaine direction rectiligne et avec une vitesse uniforme, pendant que la roue elle-même tourne autour de son axe avec une vitesse convenable. Cette espèce d'engrenages est due à l'anglais White.

Vis sans fin.

Fig. 6, pl. XXXV. Pour chaque révolution de l'arbre a, la roue b avance d'une dent (en supposant la vis à filet simple). Le rapport des vitesses entre les arbres est donc donné exactement par le nombre des dents de la roue. Ce mécanisme offre de grandes facilités pour ralentir un mouvement, mais, comme

par l'effet des frottements, il consomme beaucoup de force, on ne doit recourir à son emploi que lorsque les efforts à transmettre sont peu considérables.

Spirale engrenant avec une roue dentée.

Fig. 7, pl. XXXV. a est une roue d'engrenage cylindrique, b un disque, portant, sur une de ses faces, une saillie en forme de spirale. La distance de deux enroulements est égale au pas de la roue a. En faisant tourner le disque b d'une circonférence, on fait, par suite, tourner d'une dent la roue a. Ce mécanisme agit donc comme une vis sans fin et peut être employé pour les compteurs; mais il ne se prête pas à la transmission de forces un peu considérables, car les pertes par le frottement sont encore plus grandes que dans la vis sans fin.

Engrenages différentiels avec roues coniques.

Fig. 8, pl. XXXV. Ce genre d'engrenages est principalement en usage, dans certaines machines de filatures, pour le renvidage des fils. C'est un mécanisme qui permet d'ajouter, l'un à l'autre, deux mouvements de rotation ou d'en faire la différence. a est un arbre sur lequel est calée la roue conique b; c est une autre roue conique, qui fait corps avec la pièce creuse d et la roue droite e; l'ensemble, formé par ces trois pièces, peut tourner librement sur l'arbre a; *f* est une roue droite ou une poulie, également folle sur le même arbre; enfin g est une roue, dite planétaire, dont l'axe est logé dans la pièce *f* et dont les dents engrènent avec celles des roues b et c; elle a d'ailleurs le même diamètre que ces deux dernières roues. Si on vient à donner à b et à *f* des mouvements de sens contraires, comme l'indiquent les flèches, chacun de ces mouvements détermine une rotation de c d e. Cette dernière pièce prend donc un mouvement complexe qu'il s'agit de déterminer; on peut y arriver de plusieurs manières.

Première solution. Il est évident que l'angle, dont tourne la roue c, par l'effet des rotations simultanées de b et de *f*, est exactement le même que si on faisait tourner d'abord b, en laissant *f* immobile, puis qu'on arrêtât b, pour faire tourner *f*. Si on fait tourner b d'une circonférence, dans le sens de la flèche,

f restant immobile, cette dernière roue fonctionne uniquement comme support, et la roue c tourne d'un tour entier, en sens contraire de b. Si maintenant, b restant immobile, f accomplit une rotation d'un tour, dans le sens de la flèche, la roue planétaire g tournera autour de l'axe a, en même temps qu'elle accomplira une révolution entière autour de son axe propre. Si la roue g tournait simplement autour de l'axe a, sans tourner autour de son axe, la roue c ne ferait qu'un tour; d'un autre côté, si cette même roue g tournait simplement autour de son axe, sans se déplacer par rapport à l'axe a, la roue c effectuerait également une rotation. Le double mouvement autour des deux axes a donc pour résultat de faire exécuter à la roue c deux rotations, dans le sens de la flèche. Chaque rotation de b déterminant d'ailleurs une rotation de c, il en résulte que, lorsque b et f agiront simultanément, le nombre $\binom{n}{c}$ de rotations par minute de la roue c sera déterminé par la relation:

$$\binom{n}{c} = \binom{n}{b} + 2\binom{n}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$\binom{n}{b}$ et $\binom{n}{f}$ indiquant le nombre de tours par minute des roues b et f.

Si f tournait dans le même sens que b, le dernier terme du second membre devrait être affecté du signe — et on aurait dans ce cas:

$$\binom{n}{c} = \binom{n}{b} - 2\binom{n}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Enfin, si f tournant dans la direction indiquée sur la figure, b tournait en sens contraire, c'est le premier terme du second membre qui devrait être pris négativement et on aurait alors:

$$\binom{n}{c} = -\binom{n}{b} + 2\binom{n}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Dans le premier cas, celui qui correspond à la relation (1), l'appareil superpose les rotations, les ajoute l'une à l'autre; dans les cas (2) et (3), il les retranche, au contraire, l'une de l'autre. Si le calcul fournit pour $\binom{n}{c}$ une valeur négative, on doit en conclure que le mouvement communiqué à c est de sens contraire à celui qu'indique la flèche sur la figure.

Deuxième solution. On peut encore déterminer le mouvement de la roue c, en partant de ce principe que les mouvements relatifs de toutes les roues ne subissent aucun changement, quand on donne à tout l'appareil un mouvement de rotation commun.

Soient $\binom{n}{b}$, $\binom{n}{f}$, $\binom{n}{c}$ les nombres de tours par minute des roues b, *f*, c, suivant les directions des flèches. Imprimons à tout l'appareil, autour de l'axe a, une rotation commune, égale et contraire à celle de la roue *f*. Cette roue sera alors en repos absolu et les roues b et c feront, par minute, des nombres de tours, représentés par $\binom{n}{b} + \binom{n}{f}$ et $\binom{n}{c} - \binom{n}{f}$. Mais, *f* étant en repos, les vitesses de b et de c doivent être égales, on a donc:

$$\binom{n}{b} + \binom{n}{f} = \binom{n}{c} - \binom{n}{f}$$

Ou

$$\binom{n}{c} = \binom{n}{b} + 2\binom{n}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

formule identique à celle que nous avons trouvée précédemment.

Engrenages différentiels avec roues droites.

Fig. 9, pl. XXXV. a est un arbre, sur lequel se trouve calé le pignon b; sur le même arbre peut tourner librement une roue *f*, dont le corps est percé d'une ouverture, que traverse, à frottement libre, un axe g, portant deux roues c et d; e est une autre roue folle sur l'arbre a. Les roues b et c engrènent l'une avec l'autre, ainsi que les roues d et e. Si on fait tourner simultanément les roues indépendantes b et *f*, il en résulte, pour la roue e, un mouvement de rotation composé, que nous allons étudier.

Première solution. Si on laisse *f* immobile et qu'on fasse faire un tour à l'arbre a, l'ensemble des pièces constitue une transmission d'engrenages ordinaires et la roue e fait un nombre de tours représenté par $\frac{b}{c} \times \frac{d}{e}$, en désignant par b, c, d, e les rayons des roues. Si, d'un autre côté, b restant en repos, *f* fait un tour dans le sens de la flèche, c roulera sur b et ce roulement peut se décomposer en une rotation et une révolution autour

de b; cette dernière a pour résultat de faire tourner e d'un tour dans le sens de la flèche.

Dans cette révolution de c autour de b, les roues c et d tournent, autour de l'axe g, d'un nombre de tours représenté par $\frac{b}{c}$; par suite la roue e fera, autour de son axe, un nombre de tours, exprimé par $\frac{b}{c} \times \frac{d}{e}$, dans une direction contraire à celle de la flèche; en résumé, un tour de f détermine, pour e, une rotation de $\left(1 - \frac{b}{c} \times \frac{d}{e}\right)$ tours.

Si maintenant $\binom{n}{b}$ et $\binom{n}{f}$ représentent les nombres de tours de b et de f, on aura évidemment, d'après les considérations précédentes:

$$\binom{n}{e} = \binom{n}{b} \frac{b}{c} \times \frac{d}{e} + \left(1 - \frac{b}{c} \times \frac{d}{e}\right) \binom{n}{f} \quad . \ . \ (1)$$

Ou

$$\binom{n}{e} = \binom{n}{f} + \frac{b}{c} \times \frac{d}{e} \left[\binom{n}{b} - \binom{n}{f}\right] \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

Deuxième solution. Si on fait tourner b de $\binom{n}{b}$ tours, f de $\binom{n}{f}$ tours, suivant la direction des flèches et si, en même temps, on communique, en sens inverse, à tout l'appareil une rotation de $\binom{n}{f}$ tours, f passera au repos et les nombres de révolutions des roues b et e seront représentés respectivement par:

$$\binom{n}{b} - \binom{n}{f} \text{ et } \binom{n}{e} - \binom{n}{f}$$

Comme f est supposé immobile, on se trouve dans le cas d'une transformation ordinaire de mouvement par engrenages et on a, par suite:

$$\binom{n}{e} - \binom{n}{f} = \left[\binom{n}{b} - \binom{n}{f}\right] \frac{b}{c} \times \frac{d}{e} \quad . \ . \ . \ . \ (3)$$

relation identique à la relation (2) trouvée précédemment.

Trains de roues différentielles à vitesses variables.

Le mouvement composé d'un équipage de roues différentielles peut être uniforme ou varié, suivant que les mouvements élémentaires eux-mêmes sont uniformes ou ne le sont pas. Généralement on se trouve conduit à l'emploi des roues différentielles, lorsqu'on veut ajouter ou retrancher, l'un de l'autre, deux mouvements, dont l'un est uniforme et l'autre varié; ce dernier mouvement élémentaire, dans la plupart des cas, s'obtient à l'aide de cônes ou de cames, organes que nous étudierons plus tard.

Manivelle avec roues coniques.

Fig. 10, pl. XXXV. a est un arbre, supporté par deux paliers, terminé à une de ses extrémités par un volant c et à l'autre par une roue conique d; e est une roue conique, fixée sur le bâti et, par suite, immobile, *f* est une manivelle, folle sur l'arbre a et dont la tige, prolongée au delà de cet arbre, se termine par une partie arrondie, autour de laquelle peut tourner la roue conique g, dont les dents engrènent avec celles des roues d et e. En faisant faire un tour complet à la manivelle *f*, l'arbre a et le volant qu'il porte font deux tours, comme il est facile de s'en assurer. Ce dispositif n'a d'ailleurs pratiquement qu'une importance très secondaire.

Manivelle avec roues cylindriques.

Fig. 11, pl. XXXV. a est un arbre, supporté par des coussinets, sur lequel sont calés le volant c et le pignon d; g est une roue fixée d'une manière invariable sur le bâti, h une manivelle, qui peut tourner librement autour de l'arbre a; cette manivelle, prolongée au delà de cet arbre, sert de point d'appui à un petit arbre, qui porte les roues dentées e et *f*, qui engrènent respectivement avec les roues g et d. Pour un tour de la manivelle, *f* fait, autour de son axe, un nombre de tours représenté par $\frac{g}{f}$, ce qui donne, pour le nombre de tours de l'arbre a, $\frac{g}{f} \times \frac{e}{d} - 1$, h et a ayant des rotations en sens inverses. Comme le précédent, ce mécanisme n'offre presque aucune utilité pratique.

Roues pendantes.

Fig. 12, pl. XXXV. Ce mécanisme est destiné à transmettre le mouvement de rotation d'un axe fixe a à un second axe c, dont la position peut varier; on voit qu'il se compose d'une série de roues dentées n, k, l, m, p, dont les axes passent dans des glissières, susceptibles de déplacements angulaires, les unes par rapport aux autres. Si on fait tourner n et que, en même temps, l'axe c se déplace (entre certaines limites) perpendiculairement au plan de la figure, on obtient en c un mouvement de rotation égal (approximativement) à celui qui résulterait de l'action directe de n sur p. Ce dispositif, imaginé pour les *bancs-à-broches* de filatures, y rend de très bons services.

Rotations simultanées d'un corps autour de deux axes.

Fig. 13, pl. XXXV. a est une sphère munie d'un axe b, qui traverse une couronne c, mobile elle-même autour de l'axe e. Une console h, qui fait corps avec cette couronne, supporte un petit arbre, sur lequel sont calées deux roues i et k. l'une droite, l'autre conique; cette dernière engrène avec une autre roue conique *f*, calée sur l'axe b; enfin g est une roue dentée, fixée, d'une manière invariable, au bâti général. La rotation de l'axe e entraine celle de la couronne c, de la sphère a, de la console h et des roues i, *f* et k; si la roue g n'existait pas, tout l'appareil aurait simplement un mouvement de rotation autour de l'axe e; mais la présence de la roue g, dont les dents engrènent avec celles de la roue i, force cette dernière à rouler sur la circonférence de g. Il en résulte une rotation de k et de *f* et, par suite, de l'axe b avec la sphère. Celle-ci reçoit donc deux mouvements de rotation, l'un autour de l'axe e, l'autre autour de l'axe b, perpendiculaire au premier. Pour un tour de e, la sphère fait une révolution autour de cet axe et $\frac{g}{i} \frac{k}{f}$ révolutions autour de l'axe b.

Roues non circulaires.

Théorie. Soient S et S_1 (fig. 14, pl. XXXV) deux roues fixées sur les arbres A et A_1; ces roues sont terminées par des courbes, assujéties à la condition de rouler l'une sur l'autre, comme

les cercles primitifs des roues d'engrenages ordinaires, lorsque chacun des axes tourne suivant une certaine loi. Les lignes satisfaisant à cette condition portent le nom de lignes de roulement. Elles ont pour propriété caractéristique de rester toujours tangentes en un point, pendant le mouvement des axes; de plus, les longueurs d'arcs, dont les points de contact se déplacent, en un temps donné, sur les deux courbes, sont toujours égales. En munissant ces lignes de roulement d'une denture, on obtient des roues d'engrenages, au moyen desquelles on peut transmettre à un arbre A_1 un mouvement de rotation, suivant une loi déterminée, en imprimant à un arbre A un mouvement de rotation, suivant une loi différente. Les roues de ce genre peuvent être utilisées pour transformer, par exemple, un mouvement de rotation uniforme en un mouvement varié, suivant une loi donnée.

La détermination des lignes de roulement peut se faire de la manière suivante: Soient A, A_1 (fig. 15, pl. XXXV) les axes des roues, D E, D_1 E_1 les lignes de roulement dans une position déterminée, pour laquelle elles sont tangentes au point B, sur la ligne $A A_1$. Si, à partir du point B, on prend, sur B D et B D_1, deux arcs, infiniment petits, B C et B C_1, de même longueur, et si on mène les rayons A C et A_1 C_1, C et C_1 seront les points qui devront venir en contact, lorsque les deux roues auront tourné, l'une de l'angle $C A B = d\varphi$ et l'autre de l'angle $B A_1 C_1 = d\varphi_1$. Mais, pour que les points C et C_1 puissent venir en contact, il faut d'abord qu'on ait $A C + A_1 C_1 = A A_1$ et, de plus, que les angles, formés par les rayons A C et A_1 C_1 avec les tangentes aux lignes de roulement en C et C_1, aient la même valeur. Ces conditions seront satisfaites, si on pose:

$$\left.\begin{aligned} \varrho + \varrho_1 &= D \\ \varrho\, d\varphi &= \varrho_1\, d\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Connaissant la loi suivant laquelle l'axe A_1 doit se mouvoir, lorsqu'on donne à A un mouvement de rotation uniforme, on connait, par cela même, la relation qui doit exister entre φ_1 et φ:

$$\varphi_1 = \text{fonct.}\ (\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) permettent de déterminer les lignes de roulement; les premières donnent:

$$\left.\begin{aligned}\rho &= \frac{D}{1 + \frac{d\varphi}{d\varphi_1}} \\ \rho_1 &= \frac{D}{1 + \frac{d\varphi_1}{d\varphi}}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

En différentiant l'équation (2), on obtient une expression qui donne $\frac{d\varphi}{d\varphi_1}$ en fonction de φ, et si, dans cette expression, on remplace φ par sa valeur, tirée de l'équation (2), on a $\frac{d\varphi_1}{d\varphi}$ exprimé en fonction de φ_1. En portant ces valeurs de $\frac{d\varphi}{d\varphi_1}$ et $\frac{d\varphi_1}{d\varphi}$ dans les équations (3), on obtiendra la valeur de ρ en fonction de φ et celle de ρ_1 en fonction de φ_1. On aura ainsi, en coordonnées polaires, les équations des lignes de roulement.

Application de la théorie. Proposons nous de construire deux roues d'engrenages, assujéties aux conditions suivantes:

1°. La roue, dont les éléments sont ρ et φ, doit avoir m côtés polygonaux, et celle qui correspond à ρ_1 et φ_1 doit en avoir m_1; on suppose $m_1 > m$, de telle sorte que le quotient $\frac{m_1}{m} = i$ exprime le rapport des engrenages.

2°. La loi du mouvement de la seconde roue doit être:

$$\varphi_1 = A\,\varphi + B \sin k\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

A, B, k représentant des constantes, que nous laisserons pour le moment indéterminées.

Cette loi représente, pour la seconde roue, un mouvement périodiquement accéléré, si la première roue possède un mouvement uniforme.

L'équation (4) donne:

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = A + B\,k \cos k\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

en portant cette valeur dans la seconde des équations (3), on obtient:

$$\rho_1 = \frac{D}{1 + A + B\,k \cos k\,\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

En vertu de la première condition, énoncée précédemment, on doit avoir $\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ pour $\varphi = \frac{2\pi}{m}$; de plus, la valeur de ρ_1, pour

$\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ ou $\varphi = \frac{2\pi}{m}$, doit être égale à la valeur de ϱ_1 pour $\varphi = o$. D'après les équations (4) et (6), ces conditions seront remplies, si on a:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi}{m_1} &= A\,\frac{2\pi}{m} + B\sin\frac{2k\pi}{m} \\ \frac{D}{1 + A + Bk} &= \frac{D}{1 + A + Bk\cos\frac{2k\pi}{m}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

équations qui sont satisfaites, en posant:

$$\left.\begin{aligned} k &= m \\ A &= \frac{m}{m_1} = \frac{1}{i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Deux des trois constantes k, A et B se trouvent ainsi déterminées.

Quant à la troisième constante B, on peut la déterminer par la condition que la plus grande et la plus petite des vitesses angulaires de la roue à mouvement varié aient entre elles un certain rapport γ.

En vertu de l'équation (5), le maximum de la vitesse angulaire correspond à $\cos k\varphi = 1$ et le minimum à $\cos k\varphi = -1$; on aura donc:

$$\gamma = \frac{A + Bk}{A - Bk}$$

Si on remplace k et A par leurs valeurs tirées des relations (8), on trouve pour B, en se rappelant que $m\,i = m_1$:

$$B = \frac{1}{m_1}\,\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Les valeurs des trois constantes, portées dans les expression (4) et (6), donnent:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{i}\left(\varphi + \frac{1}{m}\,\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\sin m\varphi\right) \\ \varrho_1 &= \frac{i\,D}{1 + i + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\cos m\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

Pour tracer, à l'aide de ces équations, les deux lignes de roulement des roues, on procède de la manière suivante: on prend

une série de valeurs de φ et on calcule, à l'aide des équations (10), les valeurs correspondantes de φ_1 et de ρ_1, ce qui permet de tracer immédiatement une des lignes de roulement; en prenant ensuite les différences $D - \rho_1 = \rho$, on obtient les rayons vecteurs de l'autre ligne, qui correspondent aux valeurs choisies pour φ.

Si on prend, par exemple, $m = m_1 = 1$, $\gamma = 4$, les équations (10) donnent:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{3}{5} \sin \varphi \\ \rho_1 &= \frac{5\,D}{10 + 3 \cos \varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

La fig. 16, pl. XXXV, représente les roues établies sur ces données.

Il est d'ailleurs facile de s'assurer, dans ce cas, de l'exactitude de la construction, en vérifiant si la longueur de la périphérie est la même pour les deux roues.

Si on prend $m = m_1 = 4$, $\gamma = 2$ (fig. 1, pl. XXXVI), les équations (10) donnent:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{1}{8} \sin 4\,\varphi \\ \rho_1 &= \frac{3\,D}{6 + \cos 4\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Roues elliptiques.

Deux roues elliptiques, de mêmes dimensions, peuvent toujours se commander mutuellement, lorsque les axes de rotation coïncident avec des foyers. La loi du mouvement de rotation de ces roues pourrait se déterminer, en ayant recours à l'équation (3), établie pour le cas le plus général. Toutefois, on est conduit ainsi à des calculs assez longs, qu'il nous parait inutile de développer ici. Si on désigne par a et b les deux demi-axes d'une des ellipses, par m le rapport entre la plus grande et la plus petite des vitesses angulaires de la roue menée, en supposant la roue menante animée d'un mouvement uniforme, le plus grand rayon vecteur est $a + \sqrt{a^2 - b^2}$ et le plus petit $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. Le rapport m sera donc:

$$m = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

d'où

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} - 1}{m^{\frac{1}{2}} + 1}\right)^2}$$

Pour $m = 4$, on a $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{8}{9}}$.

Roue à une seule dent.

Fig. 3, pl. XXXVI. c est un disque, monté sur un axe a et portant une dent unique d; g est une roue d'engrenages, munie de 6 creux e et de six parties pleines, terminées par des arcs *f*, de même rayon que le disque c; la longueur obtenue, en ajoutant au rayon de ce disque la distance b h, doit être précisément égale à l'écartement des axes a et b. Lorsque la roue c vient à tourner, chacune de ses révolutions fait avancer la roue g d'une dent; mais le mouvement de cette dernière roue, au lieu de s'effectuer d'une manière continue, est intermittent; le mouvement ne se produit que pendant le temps où la dent d est en prise dans une gorge e. Ce mécanisme peut être utilisé pour les appareils du genre des compteurs.

Poulies.

Dans une transmission par courroie, il est essentiel de disposer les poulies, de manière à ce que la courroie s'enroule convenablement sur chacune d'elles. Pour cela, il est indispensable qu'au moment où un des brins arrive sur une poulie, la direction de sa ligne médiane coïncide avec la ligne qui partage, en deux parties égales, la largeur de cette poulie; il faut également que la surface de la poulie, au lieu d'être exactement cylindrique, soit légèrement bombée à partir de cette même ligne, afin que le contact, entre la courroie et la poulie, se produise surtout au milieu de la courroie; sans cette précaution, la courroie touche la poulie par un de ses bords et est exposée à tomber. Nous allons donner quelques exemples de transmissions par courroie.

Transmission ordinaire par courroie.

Fig. 4, pl. XXXVI. Dans cette disposition, le sens de la rotation est le même pour les deux poulies et les nombres de tours des arbres, par minute, sont en raison inverse des rayons de ces poulies.

Courroie croisée.

Fig. 5, pl. XXXVI. Lorsque les brins d'une courroie sont croisés, les rotations des poulies s'effectuent en sens contraires.

Commande par courroie de deux arbres non parallèles et ne se coupant pas.

Fig. 6, pl. XXXVI, élévation — fig. 7, plan. Le plan de projection est parallèle aux axes des deux arbres. Les points de fixation des poulies, sur les arbres, sont déterminés de manière à ce que la ligne d'intersection L des plans moyens soit tangente commune aux deux cercles des poulies, contenus dans ces plans. Pour que la courroie se maintienne convenablement sur les poulies, le mouvement doit avoir lieu dans le sens indiqué par la flèche. Il importe d'ailleurs que la distance des axes ne soit pas trop petite, car, dans notre solution, les conditions nécessaires pour l'enroulement ne sont remplies que d'une manière approximative, et l'approximation est d'autant plus forte que la distance des axes est plus considérable.

Si on munit l'arbre A_1 d'un coussinet, mobile autour d'un axe vertical coïncidant avec L, le mouvement pourra être transmis de B à B_1, quelle que soit la position de ce dernier arbre.

Commande, par galets-guides, de deux arbres quelconques.

Soient B et B_1 (fig. 8 et 9, pl. XXXVI) deux poulies, A et A_1 leurs axes, dont la position et la direction peuvent être tout-à-fait quelconques. Prenons, pour plan horizontal de projection, un plan parallèle aux deux axes et pour plan vertical, un plan parallèle au plan moyen de la poulie B. Sur la ligne verticale L d'intersection des plans moyens des poulies, prenons deux points m et m_1, menons, par chacun d'eux, les tangentes aux circonférences médianes des poulies et établissons deux rouleaux C et C_1, de telle manière que leurs plans moyens coïncident avec

les plans $T\,m\,T_1$, $t\,m_1\,t_1$ et que leurs cercles moyens soient tangents aux lignes $m\,T$ et $m\,T_1$, $m_1\,t$ et $m_1\,t_1$; la courroie sans fin, passant sur les deux poulies et ces deux rouleaux, permettra de transmettre le mouvement de B à B_1. Le sens du mouvement des rouleaux est d'ailleurs arbitraire.

Le dispositif que nous venons d'indiquer ne doit guère être considéré que comme une solution théorique; sa réalisation pratique conduit à de très grandes complications.

Poulie avec joint de Hook.

Lorsque les directions des axes de deux arbres ne forment qu'un très petit angle, on peut employer la disposition suivante:

Sur l'axe A (fig. 10, pl. XXXVI) on cale une poulie ordinaire B, tandis que l'axe A_1 reçoit une poulie B_1, munie d'un joint universel ou joint de Hook. Grâce à cet assemblage, la poulie B_1 participe à la rotation de l'axe A_1 et son plan moyen coïncide constamment avec celui de la poulie B.

Nous devons, toutefois, faire observer que la position de la poulie B_1 étant assez instable, il convient de placer, près de son pourtour, un certain nombre de vis, destinées à empêcher qu'elle ne puisse trop s'écarter de la position qu'elle doit occuper, et à éviter ainsi les glissements de la courroie.

Poulie d'expansion.

On désigne sous ce nom une poulie dont la circonférence est formée de plnsieurs arcs, qui peuvent s'écarter plus ou moins de l'axe, de telle sorte que la grandeur de la poulie puisse constamment varier entre certaines limites. L'emploi d'une poulie de ce genre a pour but de permettre une variation continuelle dans la vitesse de rotation de l'arbre mené, sans être obligé de modifier en rien celle de l'arbre menant.

La fig. 11, pl. XXXVI, donne une idée approchée de la disposition d'une poulie de cette espèce, sans aucune indication sur le mécanisme au moyen duquel les segments peuvent être éloignés ou rapprochés de l'axe.

Transmission de mouvement par cônes.

La fig. 12, pl. XXXVI, représente une transmission de ce genre avec des cônes droits. a et b sont deux cônes de même

forme, mais disposés en sens inverse l'un de l'autre. Ces cônes sont réunis par une courroie sans fin c, guidée par une fourchette d, qui est elle même commandée par une vis e; ce qui permet de déplacer la courroie, parallèlement à elle même, suivant la longueur des axes. Le mouvement de la vis e s'obtient, d'ailleurs, à l'aide de roues dentées f et g, dont la dernière est établie sur l'arbre du cône inférieur. Si cet arbre reçoit un mouvement de rotation uniforme, il le transmettra, par la courroie, à l'arbre du cône supérieur; mais, en raison des déplacements de la courroie, le long des axes, le rapport des circonférences, embrassées par cette courroie, sur les deux cônes, est constamment variable; le mouvement du cône supérieur est, par suite, un mouvement varié.

La fig. 13, pl. XXXVI, représente une disposition analogue à la précédente et qui n'en diffère qu'en ce que les cônes, au lieu d'être droits, sont formés de surfaces de révolution a et b, déterminées de telle sorte que, pour un mouvement de rotation uniforme de l'arbre inférieur, l'arbre supérieur prenne un mouvement varié, suivant une loi déterminée. Ce mécanisme produit donc le même résultat que les roues d'engrenages non circulaires.

Désignons par:

x, y les coordonnées d'un point quelconque M de la ligne génératrice du cône inférieur,

x_1, y_1 les coordonnées du point correspondant M_1, sur le cône supérieur,

l la longueur totale d'un des cônes,

s la quantité dont se déplace la courroie, pour un tour de l'axe inférieur,

W la vitesse angulaire constante de cet axe,

W_1 la vitesse angulaire variable de l'axe supérieur,

r et R les rayons extrêmes des cônes,

φ l'angle dont l'axe inférieur doit tourner, pour que la courroie se déplace d'une longueur x.

On a d'abord:

$$W y = W_1 y_1 \quad (1)$$

$$y + y_1 = r + R \quad (2)$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{s} x \quad (3)$$

La première de ces équations indique que les vitesses sont égales sur les circonférences embrassées par la courroie, la seconde

que la tension reste la même dans toutes les positions et, enfin, la troisième que les chemins s et x sont, entre eux, dans le rapport des angles 2π et φ.

A l'aide de ces équations, il nous est facile de calculer ou de déterminer les différents mouvements des cônes.

Supposons que les deux surfaces soient des cônes ordinaires, comme ceux de la fig. 12, et proposons-nous de déterminer la loi du mouvement du cône supérieur; on a alors:

$$\left.\begin{array}{l} y = r + (R - r)\dfrac{x}{l} \\ y_1 = R - (R - r)\dfrac{x}{l} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Ces deux équations satisfont à la relation (2); si on introduit les valeurs qu'elles fournissent, pour y et y_1, dans la relation (1), en remplaçant d'abord x par sa valeur en fonction de φ, on obtient une relation, d'où on tire immédiatement:

$$W_1 = W \frac{r + \dfrac{s}{2\pi}\dfrac{R-r}{l}\varphi}{R - \dfrac{s}{2\pi}\dfrac{R-r}{l}\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

On voit d'après cela que, dans le cas de cônes ordinaires, la loi du mouvement du second axe est loin d'être aussi simple qu'on pourrait le supposer tout d'abord.

Si on désigne par γ le rapport entre le maximum et le minimum des vitesses angulaires de l'arbre supérieur, par n le nombre de tours que fait l'arbre inférieur, pendant que la courroie se déplace de la longueur l, on a:

$$\gamma = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$s = \frac{l}{n}$$

Ou encore:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{R}{r} = \sqrt{\gamma} \\ s = \dfrac{l}{n} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

La première de ces équations détermine le rapport entre les rayons extrêmes d'un cône, la seconde l'avance de la courroie

pour un tour de l'arbre inférieur; cette valeur de s sert à déterminer le pas de la vis et le rapport des rayons des roues f et g.

Proposons-nous maintenant, comme second problème, de déterminer les formes de deux surfaces de révolution, de telle sorte que l'arbre supérieur prenne un mouvement uniformément accéléré, c'est-à-dire tel qu'on ait:

$$W_1 = W(a + b\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{r + R}{1 + \frac{W}{W_1}} \\ y_1 &= \frac{r + R}{1 + \frac{W_1}{W}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Si on substitue à $\frac{W_1}{W}$ sa valeur, tirée de la relation (7), et à φ celle que fournit l'équation (3), on obtient:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{(r + R)\left(a + b\frac{2\pi}{s}x\right)}{1 + a + b\frac{2\pi}{s}x} \\ y_1 &= \frac{r + R}{1 + a + b\frac{2\pi}{s}x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Les constantes a et b peuvent se déterminer de la manière suivante:

En désignant par γ, comme dans l'exemple précédent, le rapport entre la plus grande et la plus petite vitesse angulaire de l'arbre supérieur, on a:

$$\frac{R}{r} = \sqrt{\gamma}$$

Pour $x = 0$, on a aussi $\varphi = 0$ et $y = r$, $y_1 = R$; par suite, en vertu de la seconde des équations (9):

$$R = \frac{r + R}{1 + a} \text{ ou } aR = r$$

d'où on tire:

$$a = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

Pour $x = l$, $y = R$, $y_1 = r$. Donc, en vertu de la deuxième des équations (9):

$$r = \frac{r + R}{1 + a + b\,\frac{2\,\pi}{s}\,l}$$

d'où on déduit:

$$b = \frac{\frac{R}{r} - a}{\frac{2\,\pi}{s}\,l}$$

Ou encore, en remplaçant $\frac{R}{r}$ et a par leurs valeurs en fonction de γ:

$$b = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}}\,\frac{s}{2\,\pi\,l}$$

Si on porte ces valeurs de a et b dans les équations (9), on trouve:

$$\left.\begin{aligned} y &= r\,\frac{(1 + \sqrt{\gamma})\left[1 + (\gamma - 1)\frac{x}{l}\right]}{1 + \sqrt{\gamma} + (\gamma - 1)\,\frac{x}{l}} \\ y_1 &= r\,\frac{\sqrt{\gamma}\,(1 + \sqrt{\gamma})}{1 + \sqrt{\gamma} + (\gamma - 1)\,\frac{x}{l}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Telles sont les équations des lignes génératrices des surfaces de révolution cherchées. Ces lignes sont d'ailleurs des hyperboles.

Transmission de mouvement par chaines.

Si on monte sur deux arbres deux roues dentées, n'engrenant pas l'une avec l'autre, et si on les réunit par une chaine, dont les traverses s'engagent dans les vides des dents, on obtient ce qu'on appelle une transmission de mouvement par chaine. La fig. 14, pl. XXXVI représente un mécanisme de cette espèce; les fig. 15 et 16, reproduisent, en élévation et en plan, à plus grande échelle, une partie du dispositif.

Les fig. 1, 2 et 3, pl. XXXVII, représentent un second mode de transmission par chaine. Les roues, dans ce cas, ne sont plus, à proprement parler, munies de dents; elles offrent simplement des encoches, assez éloignées les unes des autres, et les maillons de la chaine sont plus allongés que dans le premier dispositif.

Au point de vue pratique, ces commandes de mouvements par chaines n'ont qu'une faible valeur et cela pour les raisons suivantes:

1°, La construction de ces chaines est très difficile et très dispendieuse,

2°, pour la transmission d'efforts peu considérables, il est bien préférable de recourir aux courroies, qui constituent un organe infiniment plus simple,

3°, pour les efforts considérables, l'emploi des chaines présente de graves inconvénients.

Il ne saurait, en effet, assurer pendant longtemps une transmission régulière du mouvement; l'usure des traverses et l'agrandissement des trous des maillons ont pour résultat d'allonger peu à peu les portions de chaine; comme, d'ailleurs, l'intervalle des entailles sur les roues reste constant, il en résulte qu'au bout d'un certain temps de service les traverses de la chaine ne tombent plus au milieu des encoches correspondantes.

Du reste, l'expérience a nettement prononcé contre l'emploi des chaines, dans le cas de fortes transmissions. Le vaisseau à hélice, *Great Brittain*, et *la locomotive du Sommering* de *Maffëi* comportaient des transmissions par chaines qu'on a dû supprimer.

Quoiqu'il en soit, les chaines peuvent encore être employées dans certains cas exceptionnels, surtout lorsqu'elles n'ont pas à agir d'une manière continue, mais seulement de temps en temps et, chaque fois, pendant une période de courte durée.

Transformations de mouvements par manivelles.

Sous cette désignation nous comprendrons les mécanismes dans lesquels les rotations d'arbres s'effectuent à l'aide de manivelles. Les dispositifs de ce genre sont assez nombreux.

Premier exemple.

Fig. 4 et 5, pl. XXXVII. Les arbres a et d, reposant sur des paliers, portent deux manivelles c et e; le rayon de c est

égal à l'écartement des axes a et d; celui de e est deux fois plus grand; les deux boutons de manivelles sont reliés par une bielle *f*, dont la longueur est égale au bras de e. L'axe a étant supposé animé d'un mouvement de rotation uniforme, l'axe d prend un mouvement de rotation périodiquement varié et fait deux tours pendant que l'axe a en fait un seul. Ce mécanisme n'a, dans la pratique, aucune valeur, attendu que le mouvement de d est très mal assuré, quand les directions de c, de e et de *f* se trouvent dans un même plan. D'une manière générale, on a:

$$2\,a\,(r \cos\varphi - r_1 \cos\varphi_1) - 2\,r\,r_1 \cos(\varphi - \varphi_1) = l^2 - (a^2 + r^2 + r_1^2).$$

Second exemple.

Fig. 6, pl. XXXVII. L'axe a porte deux manivelles b et c, situées dans le prolongement l'une de l'autre et de même rayon; les boutons de ces manivelles sont munis de petits galets de roulement. d est un second arbre, parallèle au premier et qui est muni de glissières en croix *f*; la distance des axes a et d est égal au rayon des manivelles b et c. a étant animé d'un mouvement uniforme, l'arbre d prend également un mouvement uniforme, extrêmement doux. Ce mécanisme ne peut guère servir que pour transmettre de petites forces; pour des efforts considérables, les tourillons et les glissières devraient avoir des dimensions trop fortes et leur ajustement présenterait des difficultés.

Troisième exemple.

Fig. 7 et 8, pl. XXXVII. a et b sont deux arbres parallèles, dont le premier porte une manivelle ordinaire d, le second une glissière c, dans laquelle peut se mouvoir la pièce e, reliée an bouton de la manivelle d. Si l'axe a tourne d'un mouvement uniforme, l'axe b prend un mouvement de rotation périodique. En désignant par r le rayon de la manivelle d, par ε la distance des axes a et b, par φ et φ_1 les angles de rotation de d et de c, on trouve sans difficulté:

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\sin\varphi_1} = \frac{\varepsilon}{r}$$

Par suite:

$$\operatorname{cotg}\varphi_1 = \operatorname{cotg}\varphi - \frac{\varepsilon}{r \sin\varphi}$$

Ce dispositif peut être employé avec avantage, toutes les fois qu'un arbre doit effectuer chacune de ses demi-révolutions avec des vitesses alternativement grandes et petites.

Quatrième exemple.

Fig. 9, pl. XXXVII. Ce mécanisme n'est qu'un cas particulier du précédent, lorsque la distance ε des axes est plus grande que le rayon r de la manivelle. Le levier c, au lieu d'exécuter des révolutions entières, n'effectue plus que des oscillations à vitesse variable.

La loi du mouvement est déterminée par la formule:

$$\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \psi} = \frac{\varepsilon}{r}$$

d'où on tire:

$$\cotg \psi = \frac{\varepsilon}{r \sin \varphi} - \cotg \varphi$$

Ou encore:

$$\cotg \psi = \frac{1}{\sin \varphi}\left(\frac{\varepsilon}{r} - \cos \varphi\right)$$

Cette dernière expression montre que ψ ne peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0° et 360°, que si on a $\varepsilon < r$, c'est-à-dire que si l'hypothèse de l'exemple précédent se trouve réalisée.

Cinquième exemple.

Le dispositif, représenté fig. 10, pl. XXXVII, diffère notablement des précédents, au point de vue de la forme extérieure, mais il produit un effet du même genre. a est un disque circulaire fixe, autour duquel tourne une roue dentée d; b est un axe de rotation, excentrique par rapport à a et portant une glissière e, dans laquelle peut se mouvoir un bouton c, qui fait corps avec le plateau denté d. Si ce dernier tourne d'un mouvement uniforme, le bouton c entraine avec lui la glissière e, en même temps qu'il se meut dans cette glissière; il en résulte, pour l'axe b, un mouvement de rotation périodique. Ce dispositif est assez compliqué, mais il offre l'avantage de permettre la commande de l'axe b dans les deux sens.

Sixième exemple.

Fig. 11, pl. XXXVII. a, b, c, d représentent quatre arbres parallèles, munis de manivelles e, f, g, h; i i est un levier coudé, dont l'articulation correspond avec le bouton de la manivelle e, tandis que ses extrémités s'engagent sur les boutons des manivelles f et g; l et k sont deux tiges, qui relient les boutons des manivelles f, h, g. Si l'axe a reçoit un mouvement de rotation uniforme, il en résulte, pour les trois autres axes b, c, d, des rotations également uniformes. On comprend facilement qu'on puisse commander d'une manière analogue un nombre quelconque d'axes parallèles. C'est à un mécanisme de ce genre qu'on a recours, dans les turbines, pour la manœuvre des vannes.

Joint universel de Hook.

Fig. 12, pl. XXXVII. Ce mécanisme constitue un des organes les plus ingénieux de la cinématique; il rend d'excellents services, toutes les fois qu'on veut établir une liaison entre deux arbres, dont la position relative n'est pas invariable. a et b sont deux axes, inclinés, l'un par rapport à l'autre, d'un angle assez petit et qui sont dans un même plan; à l'une de leurs extrémités ces arbres portent deux fourchettes c et d, reliées entre elles par une croisillon e.

Si l'arbre a tourne d'un mouvement uniforme, il en résulte, pour l'arbre b, une rotation périodiquement variée, dont la loi peut se déterminer de la manière suivante: soit f g h k (fig. 13) la circonférence, normale à l'axe a, que décrivent les extrémités f et k de la fourchette c, pendant la rotation de l'arbre a; soit g l h i le cercle analogue, normal à l'axe b, que décrivent les extrémités g et h de l'autre fourchette. L'angle des deux plans f g k h et g l h i est égal à l'angle des deux axes a et b. Si, par suite de la rotation de l'axe a, le point f arrive en f_1, le point g viendra en g_1 et, comme les deux branches du croisillon restent toujours perpendiculaires l'une sur l'autre, l'angle f_1 o g_1 doit être un angle droit. Les angles f o $f_1 = \varphi$ et g o $g_1 = \psi$, dont tournent, en même temps, les axes a et b, s'obtiennent donc en faisant glisser un angle droit sur deux plans, dont l'inclinaison est la même que celle des axes, l'angle droit étant d'ailleurs soumis à la condition d'avoir chacun de ces côtés dans un des plans, le sommet se mouvant sur l'arête d'intersection.

Il est facile de déduire de là un procédé graphique pour déterminer les angles de rotation correspondants.

Traçons (fig. 14, pl. XXXVII) l'angle d'inclinaison, $A O B = \alpha$, des axes ou des plans des cercles, décrits par les extrémités des fourchettes. Prenons un angle quelconque $C O B = f o f_1 = \varphi$; d'un point quelconque E abaissons la perpendiculaire E F sur O B, décrivons l'arc F G, du point G abaissons, sur O B, une nouvelle perpendiculaire, menons E J parallèle à O B et joignons le point O au point d'intersection H de ces deux dernières lignes. Nous aurons $H O B = g o g_1 = \psi$. En répétant cette construction, pour un certain nombre de valeurs de φ, on obtient la série des valeurs correspondantes de ψ. L'examen de ces valeurs donne lieu aux remarques suivantes. Dans le premier quadrant, c'est-à-dire pour $\varphi < 90°$, ψ est plus grand que φ; l'arbre b est donc en avance sur l'arbre a, et la différence entre φ et ψ atteint son maximum, lorsque φ est sensiblement égal à 45°. Pour $\varphi = 90°$, on a aussi $\psi = 90°$. Dans le second quadrant, on a $\varphi > \psi$; le second arbre reste donc en arrière par rapport au premier et le maximum de la différence $\varphi - \psi$ a lieu pour φ égal à $90° + 45°$ environ; pour $\varphi = 180°$, on a également $\psi = 180°$. Dans le troisième et le quatrième quadrants, on retombe sur des mouvements identiques à ceux des deux premiers.

On peut également déterminer, d'une manière très simple, par l'analyse, les relations entre φ et ψ. Si dans la fig. 14, nous posons $O E = x$, nous aurons $O F = O G = x \cos \varphi$, $E F = x \sin \varphi$, $O L = x \cos \varphi \cos \alpha = O H \cos \psi$, $L H = F E = x \sin \varphi = O H \sin \psi$. L'élimination de O H conduit immédiatement à la relation:

$$\operatorname{cotg} \psi = \operatorname{cotg} \varphi \cos \alpha$$

Ou

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \psi \cos \alpha$$

Il est très regrettable que ce joint universel soit trop couteux pour pouvoir être employé dans toutes les installations. Sans cet inconvénient, il serait préférable à tous les autres modes d'accouplement d'arbres et se prêterait à un grand nombre d'applications.

Mouvements alternatifs.

Nous comprenons sous le nom de mécanismes à mouvements alternatifs tous ceux qui ont pour résultat de transformer un

mouvement de rotation en un mouvement alternatif oscillant, ou inversement. Les appareils de ce genre jouent un rôle important dans la mécanique appliquée, et il en existe un très grand nombre; nous nous bornerons à la description de ceux qui sont susceptibles d'applications générales et nous appellerons spécialement l'attention sur les suivants.

Mouvement suivant la loi du sinus.

Fig. 15, pl. XXXVII. Une tige a passe dans deux guides b b et porte une coulisse c. Dans cette coulisse peut se mouvoir un bouton de glissière, relié à l'extrémité d'une manivelle ordinaire d. Si l'axe de cette manivelle reçoit un mouvement de rotation uniforme, la coulisse a se meut alternativement dans un sens et dans l'autre avec une vitesse périodique.

Si l'on désigne par r le rayon de la manivelle, par x le chemin que parcourt la coulisse, pendant que la manivelle tourne d'un angle φ, à partir de la position perpendiculaire à b b, la figure donne immédiatement:

$$x = r \sin \varphi$$

Les chemins, parcourus par la pièce a, représentent donc les sinus des angles de rotation de la manivelle.

C'est là le mouvement oscillatoire le plus simple, celui auquel peuvent se ramener la plupart des mouvements d'oscillation qu'on observe dans la nature.

Le mécanisme que nous venons de décrire est l'un des organes les plus satisfaisants, pour transformer un mouvement de rotation en un mouvement périodique alternatif. Il peut donc être employé pour la transmission de petites forces, lorsque la loi du mouvement sinusoïdal n'est pas en contradiction avec les conditions du problème. Toutefois, pour des efforts considérables, l'emploi de ce mécanisme ne saurait être recommandé, en raison des frottements exagérés de la glissière.

Mouvement sinusoïdal avec excentrique.

Fig. 16, pl. XXXVII. Ce mécanisme diffère du précédent en ce que la manivelle s'y trouve remplacée par un collier d'excentrique. Le mouvement transmis à la tige est identique à celui

qu'on réalise avec une manivelle, si l'excentricité ε est égale au rayon de cette manivelle.

Le mouvement par excentrique donne naissance à des frottements plus considérables encore que ceux dus à la commande par manivelle, mais il offre ce grand avantage que l'arbre peut être prolongé des deux côtés, sans qu'il soit nécessaire de l'interrompre ou de le couder.

Excentrique à excentricité variable.

Fig. 17, pl. XXXVII. L'axe a porte un disque d'excentrique b, sur lequel peut se fixer, en un point quelconque, un second disque également excentré c. Le collier g embrasse le disque c et se rattache à la tige h, qui commande la tringle i, maintenue par des guides convenables. Si on rend c fixe par rapport à b et qu'on fasse tourner a, le mécanisme agit comme une manivelle de rayon a f. Si l'on désigne par $\varepsilon =$ a e l'excentricité du disque b par rapport à a, par $\varepsilon_1 =$ e f l'excentricité de c par rapport à b, enfin par $\varphi =$ c a f l'angle dont c est déplacé par rapport à b, on aura:

$$a f = \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^2 \sin^2 \varphi}$$

pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 180°$ les trois points a, e, f, se trouvent en ligne droite, et l'on a: pour $\varphi = 0$, $a f = \varepsilon_1 + \varepsilon$, pour $\varphi = 180°$, $a f = \varepsilon_1 - \varepsilon$. En déplaçant le disque c par rapport à b, on pourra donc faire varier l'amplitude du mouvement de la tige i entre les limites $2(\varepsilon_1 - \varepsilon)$ et $2(\varepsilon_1 + \varepsilon)$. L'action de ce mécanisme, d'une exécution d'ailleurs assez compliquée, est donc identique à celle qui résulterait de l'emploi d'une manivelle à rayon variable. Dans la pratique, ce dispositif ne s'emploie que quand l'arbre a ne doit pas être interrompu.

Roue planétaire.

Fig. 18, pl. XXXVII. L'arbre a porte une roue d'engrenage b; une seconde roue dentée c, de même grandeur, est reliée à une tige e, de telle sorte que la position relative de ces deux pièces reste invariable. D'autre part, l'axe de c est relié par une tige d à l'axe a, de telle sorte que la distance entre les

centres des roues b et c reste constante. La tige de traction e est articulée avec une tige f qui peut recevoir un mouvement alternatif. La loi du mouvement, résultant de ces assemblages, peut se déterminer de la manière suivante.

Si la roue c ne changeait pas de position par rapport à d, la roue b et l'axe a tourneraient d'un angle $g\,a\,h = \varphi$, pendant que la tige d passerait de la position verticale à celle qui est représentée sur la figure. Mais, pendant que l'angle φ se trouve décrit, la roue c tourne, par l'effet de la tige e, d'un angle ψ; la roue b elle-même tourne donc encore d'un angle ψ. La rotation totale de la roue b est, par suite, $\varphi + \psi = \varphi + \varphi + \Theta = 2\,\varphi + \Theta$, d'où $\psi = \Theta + \varphi$. Si l'on désigne par r le rayon d'une des roues c ou b, par l la longueur de la tige e, on a, comme l'indique la figure:

$$\sin\Theta = \frac{2\,r}{l}\sin\varphi$$

ou

$$\Theta = \text{arc}\sin\left(\frac{2\,r}{l}\sin\varphi\right)$$

L'angle ω dont tourne la roue b, pendant qu'on décrit l'angle φ, a, par conséquent, pour valeur:

$$\omega = 2\,\varphi + \Theta = 2\,\varphi + \text{arc}\sin\left(\frac{2\,r}{l}\sin\varphi\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

pour $\varphi = 2\,\pi$, c'est-à-dire pour une rotation de d ou un mouvement alternatif complet de f, on a $\omega = 2 \times 2\,\pi$. L'axe a donc fait deux tours, pendant que la tige f effectue une fois son mouvement de va-et-vient.

Ce mécanisme, imaginé par *Watt*, n'offre aucun intérêt dans la pratique, par suite de sa complication.

Mouvement alternatif hypocycloïdal.

Fig. 19. pl. XXXVII. a est un disque immobile à denture intérieure, b un pignon denté, dont le diamètre est égal au rayon de a et dont les dents engrènent dans celles de a. Le pignon b tourne librement à l'extrémité d'une manivelle c, dont le rayon est égal à celui de b et qui se trouve calée sur un arbre f, concentrique à a. Au point d'intersection g du diamètre vertical avec le cercle primitif de b est ménagé, sur le corps de la roue

b, un œil dans lequel passe une tige verticale k, guidée à la partie supérieure par la pièce h.

Par l'effet de la rotation de *f*, la manivelle c entraine avec elle la roue b. Celle-ci reste engrenée dans les dents du disque et roule à l'intérieur de ce disque, entraînant le bouton g et la tige k, le long du diamètre vertical de a. Ce mécanisme, comme le précédent, ne peut être considéré que comme une solution ingénieuse, mais peu pratique.

Mouvement alternatif par deux manivelles.

Fig. 20, pl. XXXVII. Les axes a, a_1 portent deux roues égales b, b_1, dont les dents sont en prise. Sur ces roues sont fixés des boutons de manivelles, qui saisissent, à la partie inférieure, deux bielles c, c_1, dont les extrémités opposées s'articulent sur un balancier d. Ce balancier est d'ailleurs solidaire de la tige e, à laquelle on veut donner un mouvement rectiligne alternatif.

Si les manivelles tournent d'un angle φ, à partir de la position horizontale, et si l'on désigne par x le chemin, parcouru dans le même temps par un point de la tige e, on trouve facilement la relation:

$$x = r \sin \varphi + l \left[\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 \varphi} - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2} \right]$$

La loi de ce mouvement n'est donc pas exactement celle du sinus: elle en diffère d'autant plus que les bielles sont plus courtes par rapport aux manivelles.

Mouvement d'interférence.

Fig. 1, pl. XXXVIII. Ce mécanisme se distingue du précédent en ce que les roues et les manivelles ne sont pas égales.

Si l'on désigne par m et m_1 les nombres de dents des roues, par r, r_1 les rayons des manivelles, par x le chemin que décrit la tige, lorsque la roue b tourne d'un angle φ, dans le sens de la flèche, on obtient x de la façon suivante.

Pour éviter des complications, sans intérêt au point de vue de la pratique, nous ferons le calcul, en supposant les longueurs des bielles infinies. Les mouvements, suivant la verticale, des extrémités du balancier d coïncident alors avec les mouvements, suivant la même direction, des boutons de manivelles. Quand la

roue b tourne d'un angle φ, b_1 tourne d'un angle $\varphi \frac{m}{m_1}$; par suite, le mouvement vertical du bouton de la manivelle de b_1 est $r_1 \sin \frac{m}{m_1} \varphi$. Comme, d'autre part, le mouvement de e est la moitié de celui des extrémités de d, on a:

$$x = \frac{1}{2}\left[r \sin \varphi + r_1 \sin \frac{m}{m_1} \varphi\right]$$

Ce mécanisme permet donc d'opérer l'addition ou la soustraction de deux mouvements sinusoïdaux, suivant que les deux sinus ont le même signe ou un signe contraire. En d'autres termes, on réalise ainsi un mouvement analogue à celui sur lequel sont basées les interférences de la lumière.

Oscillations courbes.

Si un point est sollicité, par deux forces, à osciller suivant deux directions rectilignes à angle droit, il prend un mouvement oscillatoire suivant une ligne courbe. Ce genre d'oscillation courbe, due à la composition d'oscillations rectilignes, peut se réaliser à l'aide du mécanisme suivant. Dans la figure 2, pl. XXXVIII, a a_1 sont deux axes, c c_1 deux manivelles, b b_1 deux roues dentées, e e_1 deux tiges de traction, *f* un balancier, g une bielle de jonction entre *f* et e. La rotation de a détermine, par les pièces c et e, une oscillation horizontale de m, mais elle produit en même temps, à l'aide des pièces b b_1 c_1 e_1 *f* g, une oscillation verticale. Le point considéré oscille donc, en réalité, sur une ligne courbe, résultant de la composition de ses deux mouvements rectilignes à angle droit.

Désignons par r r_1 les rayons des manivelles c et c_1, par α et α_1 les angles que font les directions des manivelles avec la verticale et avec l'horizontale, au moment où commence le mouvement du mécanisme. Admettons que le mouvement soit déterminé par une roue b_2 et que le rapport des rayons des roues b_2 et b soit n, celui de b_2 et b_1, n_1; $\alpha + n\varphi$, $\alpha_1 + n_1\varphi$ seront alors les angles des manivelles avec la verticale et l'horizontale, lorsque la roue b_2 aura tourné de l'angle φ.

Si l'on prend, comme origine des coordonnées, la position qu'occupe le point m, lorsque la manivelle c est verticale et la manivelle c_1 horizontale, on a:

$$\left.\begin{array}{l} x = r \sin(\alpha + n\varphi) \\ y = r_1 \sin(\alpha_1 + n_1\varphi) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

En éliminant φ entre ces deux relations, on obtiendra l'équation de la trajectoire du point m. Cette élimination peut s'effectuer de la manière suivante.

Posons:

$$\alpha + n\varphi = \psi, \quad \alpha_1 + n_1\varphi = \psi_1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

on aura:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha + n\varphi) = \sin\psi = \frac{x}{r}, \quad \cos\psi = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \\ \sin(\alpha_1 + n_1\varphi) = \sin\psi_1 = \frac{y}{r_1}, \quad \cos\psi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2} \end{array}\right\} \quad . \quad (3)$$

L'élimination de φ entre les équations (2) donne:

$$n_1\alpha - n\alpha_1 = n_1\psi - n\psi_1$$

ou

$$n\psi_1 = n_1\psi - (n_1\alpha - n\alpha_1)$$

d'où:

$$\sin n\psi_1 = \sin n_1\psi \cos(n_1\alpha - n\alpha_1) - \cos n_1\psi \sin(n_1\alpha - n\alpha_1) \quad . \quad . \quad (4)$$

Mais on sait que l'on a:

$$\left.\begin{array}{l} \sin n\psi_1 = \binom{n}{1} \sin\psi_1 (\cos\psi_1)^{n-1} - \binom{n}{3} (\sin\psi_1)^3 (\cos\psi_1)^{n-3} + \ldots \\ \sin n_1\psi = \binom{n_1}{1} \sin\psi (\cos\psi)^{n_1-1} - \binom{n_1}{3} (\sin\psi)^3 (\cos\psi)^{n_1-3} + \ldots \\ \cos n_1\psi = (\cos\psi)^{n_1} - \binom{n_1}{2} (\sin\psi)^2 (\cos\psi)^{n_1-2} + \binom{n_1}{4} (\sin\psi)^4 (\cos\psi)^{n_1-4} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Les symboles $\binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n_1}{1}\binom{n_1}{2}\ldots$ représentant les coefficients du binôme. Si l'on remplace $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin\psi_1$, $\cos\psi_1$, par leurs valeurs, tirées des équations (3), et qu'au lieu de $\sin n\psi$, $\sin n_1\psi$, $\cos n_1\psi$, on introduise, dans la relation (4), leurs expressions sous forme de séries, on trouve:

$$\left.\begin{aligned}&\binom{n}{1}\frac{y}{r_1}Y^{n-1}-\binom{n}{3}\left(\frac{y}{r_1}\right)^3Y^{n-3}+\binom{n}{5}\left(\frac{y}{r_1}\right)^5Y^{n-5}-\ldots=\\&+\cos(n_1\alpha-n\alpha_1)\left[\binom{n_1}{1}\left(\frac{x}{r}\right)X^{n_1-1}-\binom{n_1}{3}\left(\frac{x}{r}\right)^3X^{n_1-3}+\ldots\right]\\&-\sin(n_1\alpha-n\alpha_1)\left[X^{n_1}-\binom{n_1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2X^{n_1-2}+\binom{n_1}{4}\left(\frac{x}{r}\right)^4X^{n_1-4}-\ldots\right]\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

en posant, pour abréger:

$$\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2}=Y,\qquad\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}=X\quad\ldots\quad(7)$$

Ces séries sont finies, si n et n_1 sont des nombres entiers, circonstance qui se produit forcément, si les axes a et a_1 sont reliés par des roues dentées. Dans ce cas, la courbe, représentée par l'équation (6), est une courbe algébrique et fermée.

Nous traiterons ici quelques cas particuliers.

Soit:

$$n=n_1=1$$

Ce cas correspond à celui où les roues b et b_1 sont égales et où, par suite, le nombre des oscillations verticales est égal à celui des oscillations horizontales. L'équation (6) donne alors:

$$\frac{y}{r_1}=\cos(\alpha-\alpha_1)\frac{x}{r}-\sin(x-\alpha_1)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\quad\ldots\quad(8)$$

c'est l'équation d'une ellipse.

Si, en outre, $\alpha=\alpha_1$, on trouve:

$$\frac{y}{r_1}=\frac{x}{r}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(9)$$

équation d'une ligne droite inclinée.

Si $\alpha=0$, α_1 ayant une valeur différente de 0, l'équation (7) donne:

$$\frac{y}{r_1}=\cos\alpha_1\frac{x}{r}+\sin\alpha_1\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\quad\ldots\ldots\quad(10)$$

Si $\alpha_1=90°$, l'expression ci-dessus devient:

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=1\quad\ldots\ldots\ldots\quad(11)$$

Les oscillations se font alors suivant une ellipse dont les axes sont dirigés suivant l'horizontale et la verticale; le demi-axe vertical est r_1, le demi-axe horizontal r. Si $r = r_1$, l'équation (11) se réduit à celle d'un cercle.

Supposons maintenant $n = 1$, $n_1 = 2$, auquel cas il se produit deux oscillations verticales pour une oscillation horizontale. L'équation (6) donne alors:

$$\frac{y}{r_1} = \cos(2\alpha - \alpha_1)\left[2\frac{x}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right] - \sin(2\alpha - \alpha_1)\left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

ou:

$$\frac{y}{r_1} = 2\cos(2\alpha - \alpha_1)\frac{x}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} - \sin(2\alpha - \alpha_1)\left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad (12)$$

équation d'une ligne algébrique du quatrième degré. Si on a, en outre, $\alpha = \alpha_1 = 0$, on trouve:

$$\frac{y}{r_1} = 2\frac{x}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

ou:

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 = 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Pour $n = 1$, $n_1 = 3$, la relation (6) donne:

$$\frac{y}{r_1} = \cos(3\alpha - \alpha_1)\left\{3\left(\frac{x}{r}\right)\left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right] - \left(\frac{x}{r}\right)^3\right\} - \sin(3\alpha - \alpha_2)\left\{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^3 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]\right\}$$

Ou:

$$\frac{y}{r_1} = \cos(3\alpha - \alpha_1)\frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] - \sin(3\alpha - \alpha_1)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad \ldots \quad (14)$$

Cette équation prend la forme la plus simple pour $3\alpha - \alpha_1 = 0$; elle devient:

$$\frac{y}{r_1} = \frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

équation d'une ligne du troisième degré.

Si, au contraire, $3\alpha - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, on trouve:

$$\frac{y}{r_1} = -\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1-2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

La trajectoire est, dans ce cas, une ligne algébrique du sixième degré.

Pour $n = 2$, $n_1 = 3$, l'équation (6) donne:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2}$$

$$= \cos(3\alpha - 2\alpha_1)\left\{3\left(\frac{x}{r}\right)\left[\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^3\right\}$$

$$- \sin(3\alpha - 2\alpha_1)\left\{\left[\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^3 - 3\left(\frac{x}{r}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right\}$$

ou:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = \cos(3\alpha - 2\alpha_1)\left(\frac{x}{r}\right)\left[3-4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

$$- \sin(3\alpha - 2\alpha_1)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1-4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Si on a, en outre, $3\alpha - 2\alpha_1 = 0$, cette équation devient:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = \frac{x}{r}\left[3-4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Si, au contraire, $3\alpha - 2\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, on trouve:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = -\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1-4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad (19)$$

Les équations (17), (18) et (19) représentent des lignes du sixième degré.

Une discussion analytique compléte de l'équation (6) nous conduirait à des calculs et à des recherches sans fin. Nous ne nous y arrêterons pas, d'autant plus que la représentation graphique permet de se rendre compte plus facilement des propriétés des courbes correspondantes.

Si l'on trace un rectangle $abcd$, fig. 3, pl. XXXVIII, de telle sorte que $ab = 2r$ et $ac = 2r_1$, que sur ab et ac on

décrive des demi-circonférences, que l'on divise, la première a e b en n_1 parties égales, la seconde a *f* c en n parties, que par les points de division on mène les horizontales et les verticales, en réunissant convenablement les points d'intersection, on obtient la trajectoire du point m. Dans la figure 3, par exemple, le demi-cercle a e b est partagé en 6 parties égales, le demi-cercle a *f* c en 12, autrement dit, on a $\frac{n}{n_1} = \frac{12}{6}$ et l'on compte une oscillation verticale pour deux oscillations horizontales. Si $\alpha = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, m est la position initiale du point en mouvement et la trajectoire est, dans ce cas, la parabole a m c.

Mouvement alternatif avec double crémaillère.

Fig. 4, pl. XXXVIII. a est une manivelle, b une bielle, c une tige mobile dans des glissières et recevant son mouvement alternatif de la bielle b; d est une roue dentée, mobile autour de l'articulation des pièces c et b; e est une crémaillère fixe, rapportée sur le bâti, *f* une crémaillère, mobile dans des glissières. La roue d engrène à la fois dans les pièces e et *f*. Il est clair, dans ces conditions, que le mouvement de *f* est double de celui de c.

Mouvements par cames.

Les manivelles ne sauraient être employées pour transformer un mouvement de rotation en un mouvement alternatif, dans le cas où ce dernier, au lieu de suivre la loi du sinus, est astreint à une autre loi de mouvement. On doit alors recourir à l'emploi de cames, qui permettent de réaliser un mouvement continu ou intermittent quelconque. Les cames sont, pour le mouvement alternatif, ce que sont les roues dentées non circulaires et les cônes pour les mouvements de rotation. Elles jouent, dans les machines-outils délicates, un rôle très important, mais, comme elles donnent lieu à des frottements notables et que, pour des mouvements d'une grande amplitude, elles doivent avoir de grandes dimensions, on ne les emploie jamais dans le cas d'efforts considérables.

Quelques exemples suffiront pour faire comprendre le mode de construction de ces organes.

Came pour mouvement uniforme.

Fig. 5, pl. XXXVIII. L'axe a porte une came en cœur c, sur laquelle appuie un galet b, mobile à l'extrémité d'une tige d. Cette tige est guidée de façon à ne pouvoir se déplacer que verticalement, et ce mouvement vertical s'obtient par l'effet même de la rotation communiquée à la came c. La ligne ponctuée représente une ligne équidistante du profil de la came. Si le mouvement de la tige d doit se faire avec une vitesse uniforme, les rayons vecteurs de la ligne ponctuée doivent croître proportionnellement à l'angle de rotation φ. On doit donc avoir:

$$a\,m = \varrho = \alpha + \beta\,\varphi$$

α et β représentant deux constantes. Si l'on désigne par h la hauteur totale de soulèvement, on doit avoir, pour $\varphi = \pi$, $\varrho = \alpha + h$, d'où $\alpha + h = \alpha + \beta\,\pi$, ou $\beta = \frac{h}{\pi}$. La formule devient donc:

$$\varrho = \alpha + h\,\frac{\varphi}{\pi}$$

Le plus petit rayon vecteur α est théoriquement indéterminé, mais il n'en est pas de même au point de vue pratique. Il doit être pris très grand relativement à h pour que le galet n'éprouve, de la part de la came, que le moins possible de pression latérale. Dans l'exemple que nous avons pris, le profil de la came, pour la descente, est le même que pour le mouvement ascendant. Les deux déplacements de la tige s'effectuent donc suivant la même loi.

Came pour mouvement suivant la loi du sinus-verse.

Fig. 6, pl. XXXVIII. a est une tige munie de deux galets b, b_1. Cette tige est maintenue par deux guides dans une direction verticale. Sur l'axe c est calée une came d, dont le profil est une ligne équidistante de la courbe pointillée sur le dessin et dont l'équation polaire est:

$$\varrho = \varrho_0 + r \sin.\,\text{vers.}\,\varphi$$

$\varrho_0 = b\,c$ est alors la distance du centre du galet b à l'axe de rotation c de la came, 2 r la course totale de la tige, $c\,m = \varrho$ le rayon vecteur d'un point m de la courbe, $b\,c\,m = \varphi$ l'angle

polaire correspondant. Il va de soi que, dans les tracés, on construit la courbe, en prenant directement la longueur des sinus-verses avec le compas. La courbe que nous étudions appartient à la classe de celles, dans lesquelles la somme de deux rayons vecteurs, diamètralement opposés, conserve une valeur constante. Dans ce cas, la tige peut être munie de deux galets toujours en contact avec la came. L'emploi de deux galets offre d'ailleurs cet avantage que la tige se trouve commandée par la came aussi bien dans un sens que dans l'autre.

Les deux galets peuvent toujours s'employer dans tous les cas où le loi du mouvement ascensionnel est la même que celle du mouvement descendant.

Géométriquement parlant, ρ_0 est arbitraire, mais, dans la pratique, on doit le prendre assez grand par rapport à 2 r, pour que la came se rapproche autant que possible d'un cercle.

Si l'on exprime par $f(\varphi)$ une loi de mouvement quelconque, la came devra être taillée suivant une ligne équidistante de la courbe, représentée en coordonnées polaires par l'équation:

$$\rho = \rho_0 + f(\varphi)$$

Les cames peuvent d'ailleurs servir à transmettre des mouvements discontinus, comme le montreront les exemples suivants.

Came triangulaire.

Fig. 7, pl. XXXVIII. b c d est une triangle curviligne, dont les trois côtés égaux sont des arcs de cercle, décrits chacun du sommet opposé. Chaque côté correspond, dès-lors, à un angle au centre de 60°. Ce triangle est calé sur un disque a, de telle sorte que le sommet b coïncide avec le centre. Le disque a est lui-même monté sur un arbre, dont l'axe géométrique passe par le point b. Par l'effet de la rotation de a, la came tourne donc autour du point b. En e est un cadre, dont la hauteur est égale à celle du triangle et dont la largeur est un peu plus du double de la hauteur. Le cadre est muni de deux tiges, glissant dans des guides et destinées à agir sur la pièce que l'on veut faire mouvoir.

Si nous suivons le mouvement de la came, à partir de la position représentée fig. 8, c'est-à-dire à partir du moment où le point d se trouve au-dessus de b, sur la même verticale, nous relèverons les phases suivantes:

Mouvement de l'axe:	Mouvement de la tige:
de 0° à 60°	arrêt
„ 60° „ 180°	marche descendante
„ 180° „ 240°	arrêt
„ 240° „ 360°	soulèvement.

Les mouvements de la tige, dans un sens et dans l'autre, s'effectuent suivant deux lois distinctes, selon que le cadre est en contact avec un côté du triangle ou avec un de ses sommets.

Les cames de ce genre peuvent rendre de bons services pour les commandes de tiroirs dans les machines à vapeur.

Came pour les tiroirs de détente.

Fig. 9, pl. XXXVIII. Cette came est disposée de telle sorte qu'en comptant les angles successivement décrits, à partir de l'origine, le rayon vecteur éprouve les variations suivantes:

pour l'angle α	la tige se soulève de a,
„ „ β	„ „ est arrêtée,
„ „ γ	„ „ se soulève de 2 a,
„ „ δ	„ „ est arrêtée,
„ „ $\alpha_1 = \alpha$	„ „ descend de a,
„ „ $\beta_1 = \beta$	„ „ est arrêtée,
„ „ $\gamma_1 = \gamma$	„ „ descend de 2 a,
„ „ $\delta_1 = \delta$	„ „ est arrêtée.

Transformation de mouvement par balancier.

La transformation d'un mouvement rectiligne alternatif en un mouvement de rotation continu peut s'opérer, en donnant d'abord un mouvement alternatif à un balancier muni d'une bielle, reliée elle-même à une manivelle qui tourne autour de son axe. Cette solution se complique dans le cas spécial où l'on doit relier la tige d'un piston avec l'extrémité du balancier, le premier organe se mouvant en ligne droite, tandis que le second décrit un arc de cercle. Nous allons nous occuper de la construction et du calcul de ce genre d'assemblages.

Balancier de machine à vapeur.

Fig. 10, pl. XXXVIII. a C et o c sont deux leviers, mobiles autour des centres C et o et reliés par une tringle d'attache a c; sur a c il existe un certain point b, qui se meut très sensiblement sur une droite verticale, à la condition que les angles d'écart des leviers, autour de leur position moyenne, ne soient pas trop considérables; c'est ce point qu'on doit prendre pour point d'attache de la tige du piston. Si des trois éléments suivants: 1°, a C demi-longueur du balancier, 2°, o c longueur du bras de levier, 3°. $\frac{a\,b}{b\,c}$ rapport des longueurs des deux parties de la tringle de jonction, deux sont connus, le troisième peut se déterminer, soit par une construction graphique, soit par le calcul.

Supposons qu'on donne la demi-longueur du balancier et le rapport entre les longueurs des deux parties de la tringle de jonction. Le problème pourra se résoudre graphiquement de la manière suivante.

Traçons le balancier dans trois de ses positions, aux deux extrémités de sa course et dans sa position moyenne ($C\,a_1$, $C\,a_2$, $C\,a$). Menons la corde $a_1\,a_2$ et par le point m, milieu de la longueur a p, traçons la verticale x y. C'est sur cette ligne que nous admettrons que le point d'attache de la tige du piston devra se mouvoir. Maintenant, figurons la ligne de jonction, dans ses positions extrêmes et sa position moyenne ($a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$, $a\,b\,c$), de telle sorte que le point d'attache en b_1, b_2 et b soit toujours sur la ligne x y. Enfin, déterminons le centre o du cercle passant par les trois points c_1, c, c_2; $o\,c = o\,c_1 = o\,c_2$ sera la longueur du bras de rappel et le point o son centre de rotation.

En vertu de ce dispositif, le point b tombera sur la ligne x y pour les positions extrêmes et la position moyenne du balancier, mais il ne s'ensuit pas que ce point doive rester constamment sur la ligne x y. En fait, le point b décrit, non pas une ligne droite, mais une portion de courbe se rapprochant beaucoup d'une droite, $b_1\,b_2$ (fig. 11). Cette courbe est une ligne algébrique du quatrième degré.

D'après la nature même du problème, il est facile de vérifier que le point b s'éloignera d'autant moins de la ligne droite verticale que la longueur du balancier sera plus grande, par rapport à sa hauteur de course, et que la tringle de jonction sera plus longue. La différence entre la trajectoire réelle et la

ligne droite est à peu près insensible, quand le balancier a pour longueur trois fois la course du piston, et que la tringle de jonction est égale à la moitié de cette course.

Les relations entre la longueur du balancier, du levier et la division de la tringle de jonction peuvent également se déterminer par le calcul; ce qui, dans certains cas, offre quelques avantages.

Si l'on pose $a\,C = a$, $a\,b = b$, $b\,c = c$, $o\,c = r$, $a_1\,C\,a = \alpha$, $c_1\,b_1\,y = c\,b\,y = c_2\,b_2\,y = \varphi$, si, d'autre part, on désigne par ξ la distance horizontale et par v la distance verticale des points c_1 et c, on trouve d'abord:

$$v^2 = \xi\,(2\,r - \xi)$$

d'où:

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{\xi} + \xi\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Maintenant on a:

la distance horizontale des points $C,\ c_1 = a\cos\alpha + (b + c)\sin\varphi$

» » » » » $C,\ c = a \quad - (b + c)\sin\varphi$

la distance verticale de . . . . $C,\ c_1 = a\sin\alpha - (b + c)\cos\varphi$

» » » » . . . . $C,\ c = \quad - (b + c)\cos\varphi$

On en déduit, pour la distance horizontale des points $c,\ c_1$, $\xi = 2\,(b + c)\sin\varphi - a\,(1 - \cos\alpha)$,

pour la distance verticale des mêmes points, $v = a\sin\alpha$.

Mais, d'un autre côté, on a:

$$a\,m = m\,p = b\sin\varphi = \frac{1}{2}\,a\,(1 - \cos\alpha).$$

d'où:

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{a}{b}\,(1 - \cos\alpha)$$

Si l'on introduit cette valeur dans les expressions de ξ et v, on trouve:

$$\xi = a\,\frac{c}{b}\,(1 - \cos\alpha),$$

$$v = a\sin\alpha,$$

et ces valeurs, reportées dans la relation (1), donnent:

$$r = \frac{1}{2}\left[a\,\frac{b}{c}\,\frac{\sin^2\alpha}{1 - \cos\alpha} + a\,\frac{c}{b}\,(1 - \cos\alpha\right] \quad . \; . \; . \quad (2)$$

d'où on tire:

$$\frac{b}{c} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} \left[\frac{r}{a} + \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \sin^2\alpha}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Si α ne dépasse par 20° environ, on peut, sans erreur sensible, poser $\sin\alpha = \alpha$, $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ et l'équation (2) devient alors:

$$r = a\frac{b}{c} + \frac{1}{4}a\frac{c}{b}\alpha^2$$

Mais $\frac{1}{4}a\frac{c}{b}\alpha^2$ est encore une quantité très petite par rapport à $a\frac{b}{c}$ et peut être négligée sans inconvénient. On a donc, comme valeur approximative:

$$r = a\frac{b}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cette formule approchée est particulièrement utile lorsque le centre de rotation de la bielle est donné et qu'on veut déterminer le point d'attache sur la tige de jonction. En effet, dans ce cas, on connait approximativement $a + r$. Si l'on pose $a + r = d$, l'équation (4) donne:

$$\frac{b}{c} = \frac{d - a}{a} = \frac{d}{a} - 1$$

Une fois le rapport $\frac{b}{c}$ déterminé par cette formule simple, on peut, à l'aide de la construction graphique, indiquée plus haut, déterminer plus exactement le centre de rotation et la longueur de la bielle.

Parallélogramme de Watt pour machines à vapeur.

Fig. 12, pl. XXXVIII. Si A B, B C D, D E sont les pièces d'un dispositif de balancier régulièrement établi, la tige C F se trouvera guidée en ligne droite. Si l'on articule en D une tige $D_1 \ldots D_4$, parallèle à A B_1, en prenant les tiges $B_1 D_1$, $B_2 D_2$, $B_3 D_3$, $B_4 D_4$ d'égale longueur et si, aux points d'intersection C_1, C_2, D_3, C_4 de ces tiges avec le prolongement de A C, on établit de nouvelles tiges, ces dernières se mouvront également en ligne droite,

car les points C_1, C, C_2, D_3, C_4 ... décrivent évidemment des figures semblables et la trajectoire de C est une ligne droite. Tel est, sous une forme généralisée, le parallélogramme imaginé par *Watt*. La fig. 13 représente le dispositif particulier employé par cet illustre constructeur pour ses machines.

Etant donnés le balancier et le parallélogramme, on peut, comme dans le cas précédent, déterminer le centre de rotation et la longueur du levier de rappel, soit par une construction graphique, soit par le calcul. Dans le premier système, on trace le balancier et le parallélogramme, tant aux extrémités qu'au milieu de leur course, et on cherche le centre du cercle passant par les trois positions du point D. On doit, en outre, prendre la position du point D_3 sur la verticale, qui passe par le milieu de la flèche de l'arc, comme on l'a fait d'ailleurs pour la fig. 10.

Si l'on pose $A B_3 = a$, $A B = b$, $D E = r$, qu'on désigne par α l'angle compris entre la position la plus élevée et la position moyenne du balancier, on trouve facilement et de la même manière qu'à la page 389:

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{a - b}\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} + (a - b)(1 - \cos \alpha)\right]$$

Si α est suffisamment petit pour qu'on puisse remplacer $\sin \alpha$ par α et $\cos \alpha$ par $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, on trouve:

$$r = \frac{b^2}{a - b} \text{ et } b = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + a r}$$

Si, dans la figure 12, pl. XXXVIII, on supprime les pièces $B_3 D_3$, $B_2 D_2$, $B_1 D_1$, on obtient un dispositif identique à celui que *Watt* a adopté pour les machines de vaisseaux, mais représenté dans une position renversée. Dans ce cas encore, le centre de rotation et la longueur de la bielle d'attache s'obtiennent graphiquement, en dessinant les trois positions principales du balancier et en cherchant le centre E du cercle, qui passe par les trois points D.

Par le calcul, on procède absolument comme dans les cas précédents et on trouve:

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{\frac{c}{d}\, a - b}\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} + \left(\frac{c\ a}{d} - b\right)(1 - \cos a)\right]$$

en posant, dans la fig. 12:

$$A B_4 = a, \; A B = b, \; B_4 D_4 = c, \; B_4 C_4 = d, \; D E = r.$$

Cette formule se déduit d'ailleurs de l'équation (2), relative au balancier simple, en y remplaçant a, b et c, respectivement par b, $\frac{d\,b}{a}$ et $c - d\,\frac{b}{a}$.

Balancier sans axe de rotation.

Fig. 14, pl. XXXVIII. $c\,a$ est un balancier, dont l'extrémité c glisse, d'un mouvement alternatif, dans une coulisse horizontale. L'extrémité a doit se mouvoir suivant une ligne verticale. $b\,o$ est un levier mobile autour du point o. Le centre de rotation o et la longueur $b\,o$ du levier se déterminent graphiquement, en figurant le balancier à l'extrémité supérieure de se course $c\,b\,a$, dans sa position moyenne $c_1\,b_1\,a_1$, et dans sa position la plus basse $c_2\,b_2\,a_2$, puis en cherchant le centre o du cercle passant par les points b, b_1, b_2.

Par le calcul les dimensions principales, pour la construction, se déterminent de la manière suivante.

Soit $c\,a = a$, $c\,b = b$, $o\,b = r$, $a\,c\,o = \alpha$; soient ξ et v les distances verticale et horizontale des points b et b_1, on a:

$$c\,c_1 = a\,(1 - \cos\alpha)$$

$$\xi = a\,(1 - \cos\alpha) + b\cos\alpha - b = (a - b)\,(1 - \cos\alpha)$$

$$v = b\sin\alpha$$

Mais:

$$v^2 = \xi\,(2\,r - \xi)$$

d'où:

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{\xi} + \xi\right)$$

ou, en remplaçant ξ et v par les valeurs trouvées ci-dessus:

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{a - b}\,\frac{\sin^2\alpha}{1 - \cos\alpha} + (a - b)\,(1 - \cos\alpha)\right]$$

Les balanciers, avec bielle d'attache et parallélogramme, sont de moins en moins employés; ils constituent des dispositifs compliqués et couteux et leurs nombreuses articulations ne permettent pas de compter sur une très grande précision. Cependant, lorsqu'il s'agit de mettre en mouvement, et avec des vitesses

différentes, un grand nombre de tiges de pompes, c'est encore au parallélogramme de *Watt*, qu'il convient de recourir de préférence.

Tige guidée par un levier oscillant.

Fig. 15, pl. XXXVIII. La pièce A, extrémité d'une tige de piston doit être guidée en ligne droite. En B est un levier, muni de deux tourillons f et c et pouvant tourner autour de O. L'extrémité c de A forme glissière et embrasse la pièce qui porte le tourillon c. La bielle D relie d'ailleurs cette pièce au levier par l'intermédiaire des tourillons f et g. Avec des dimensions convenablement choisies pour les différentes pièces, le point g reçoit, dans le mouvement alternatif du piston, des déplacements en ligne droite. Nous devons faire remarquer toutefois que ce mouvement rectiligne n'est qu'approximatif.

Quant aux rapports qu'il convient d'adopter pour les pièces, on les détermine de la manière suivante, fig. 16. On trace le levier B dans sa position moyenne et dans ses positions extrêmes, O f, O f_1, O f_2, on prend arbitrairement la longueur f g de la bielle d'assemblage et, avec cette longueur pour rayon, des points f_1 et f_2 comme centres, on décrit les cercles k_1 et k_2. Par le point g on élève sur O f une perpendiculaire, qui coupe en deux points chacun des cercles k_1 et k_2. Enfin, par ces points d'intersection, h_1, g_1, g_2, h_2, on mène des parallèles à O f, jusqu'à leur rencontre en c_1, γ_1 et c_2, γ_2 avec les positions O γ_1 et O γ_2 du levier B. Les points c_2 et γ_2 sont ceux où les tourillons c, destinés au guidage, (fig. 15), doivent être fixés. Lorsque le tourillon est en c_2, on a la disposition de la fig. 15. Si, au contraire, il est en γ_2, le mécanisme prend la forme générale indiquée fig. 17.

Pour que la courbe décrite par le point g de la bielle f g, (fig. 16), s'écarte aussi peu que possible d'une ligne droite, dans le mouvement du levier O f, il importe de donner aux angles α et β une valeur suffisamment petite.

Mouvement avec crémaillère.

Fig. 1, pl. XXXIX. a a est une plaque qui peut glisser dans des guides. Elle porte une rainure b et une denture à crémaillère c; d est une axe fixe, tournant d'un mouvement uni-

forme. Sur cet arbre sont calés deux bras e, réunis, à leurs extrémités, par une axe qui porte le pignon *f* et la roue g. L'extrémité de l'axe s'engage dans la rainure b, le pignon *f* engrène avec les dents c; enfin l'axe d porte une pignon h, qui commande la roue g. En faisant tourner l'axe d, le mouvement se transmet par g et *f*; les dents de *f* font avancer la crémaillère c jusqu'à ce que l'extrémité de l'axe *f* arrive à la naissance de la courbure de la rainure b. Le tourillon descend alors en suivant cette rainure, et les parties e, *f*, g viennent prendre les positions marquées en pointillé, e_1, f_1, g_1. La pièce c se trouve alors obligée de se mouvoir dans une direction opposée à la précédente.

Ce mécanisme peut être employé, lorsque les mouvements dans les deux sens doivent s'effectuer avec la même vitesse et que la force à transmettre n'est pas trop considérable. Toutefois, dans la période où les organes e, *f*, g changent de position, le mouvement de la plaque n'est pas uniforme; rapide au début, il va en diminuant jusqu'au repos, pour augmenter ensuite.

Mouvement avec crémaillère et roue en partie dentée.

Fig. 2, pl. XXXIX. a est un cadre, pouvant glisser dans des guides convenablement disposés. Il est évidé à l'intérieur, et les deux côtés de cet évidement b_1, b sont dentés. c est une roue, dentée sur la moitié de sa circonférence et dont les dents, pendant que la roue tourne d'un mouvement continu, engrènent tantôt avec celles de b, tantôt avec celles de b_1, de façon à communiquer au cadre a un mouvement alternatif. Au moment où les dents de la roue c abandonnent la denture b, elles ne doivent pas encore être en prise avec b_1, sans quoi le cadre serait sollicité à se mouvoir à la fois vers le haut et vers le bas et, par suite, resterait en repos. Pour assurer une commande sûre et précise du cadre, lorsque la roue c n'agit pas, on dispose, sur l'axe de c, une espèce de manivelle, portant un bouton d. Aux extrémités des crémaillères sont également rapportés deux cames e et e_1, sur lesquelles s'appuie le bouton, pendant la suspension de l'action de la roue c sur l'une ou l'autre des crémaillères.

Les profils de ces cames sont des lignes équidistantes de celles que décrit le centre du bouton par rapport au cadre, lorsque celui-ci se meut d'un mouvement alternatif uniforme et que la manivelle tourne avec une vitesse constante.

Roues coniques en partie dentées.

Fig. 3, pl. XXXIX. Ce mécanisme est destiné à transformer un mouvement de rotation continu en un mouvement de rotation alternatif.

a est une roue dentée sur la moitié de sa circonférence, b, c sont deux autres roues, également à demi-denture et montées sur un axe e e. Si a tourne d'un mouvement continu, sa demi-denture engrène alternativement avec celles des roues b et c; il en résulte donc pour l'axe e e un mouvement alternatif. Dans ce mécanisme, comme dans le précédent, la roue a ne saurait être en prise à la fois avec b et c, et un dispositif spécial est nécessaire pour compenser le temps d'arrêt au passage d'une roue à l'autre. Du reste, au point de vue pratique, ce mécanisme n'offre aucun intérêt.

Crémaillère courbe avec roue en partie dentée.

Fig. 4, pl. XXXIX. Ce dispositif se distingue de celui de la page 394, en ce qu'au lieu d'un cadre mobile en ligne droite, il comporte une pièce a, oscillant autour d'un point fixe *f*. b, b_1 sont deux dentures concentriques à *f*, c une roue dentée sur la moitié de sa circonférence. Là encore on dispose des cames et un bouton de manivelle destinés à agir, quand la roue motrice passe d'une denture à l'autre.

Roue interrompue avec fuseaux.

Fig. 5, pl. XXXIX. Sur la disque a est disposé un anneau c, muni de fuseaux d'engrenage et terminé par deux arcs e, e; *f* est un pignon taillé de façon à engrèner dans les fuseaux précédents. L'axe g du pignon passe dans une glissière, dont la fente a une longueur suffisante pour que le pignon engrène, soit intérieurement, soit extérieurement, avec les fuseaux, suivant que son axe se trouve en haut ou en bas de la glissière. L'axe g porte, en arrière du pignon *f*, un tourillon qui touche le bord du disque c. Lorsque l'axe g tourne d'un mouvement continu, le disque a tourne d'un mouvement alternatif suivant la position de la roue *f*.

Roue à interruption avec double denture.

Fig. 6, pl. XXXIX. Ce mécanisme se distingue du précédent par la forme de l'engrenage de a. Cet engrenage est double, de telle sorte que la vitesse de rotation de a est plus grande, quand le pignon agit à l'intérieur que quand il se trouve à l'extérieur du disque. L'axe du pignon moteur doit d'ailleurs, dans ce cas comme dans le précédent, être muni d'un joint de Hook ou d'une disposition analogue.

Encliquetages.

On désigne sous ce nom les organes à pièces saillantes destinés, soit à donner un mouvement intermittent dans un sens, soit à empêcher un mouvement de se produire dans une certaine direction.

Encliquetages agissant sur un nombre entier de divisions.

Fig. 7, pl. XXXIX. a est une tige dentée, à laquelle on veut imprimer un mouvement intermittent vers la gauche. Un cliquet b est destiné à empêcher le mouvement en sens inverse. En c est un autre cliquet, mobile autour d'un tourillon et commandé, soit par un levier, soit par tout autre organe à mouvement alternatif. Si ce cliquet se meut d'un mouvement alternatif, d'une amplitude moindre qu'une division de dent, il se borne à glisser sur la surface de la dent, sans déplacer la tige. Si, au contraire, il se déplace d'une longueur s, plus grande qu'une division t, mais plus petite que deux, il commence par glisser de la quantité $s - t$, puis fait avancer la tige de la longueur d'une division. Si le chemin parcouru par le cliquet est compris entre deux et trois divisions, le glissement est de $s - 2t$ et le déplacement de la dent égal à la longueur de deux divisions, etc. On voit qu'avec ce dispositif la tige n'avance jamais que d'un nombre entier de divisions.

Encliquetages agissant par fraction de dent.

Fig. 8, pl. XXXIX. Supposons qu'on veuille communiquer un mouvement intermittent, vers la gauche, à la tige dentée a,

laquelle est soumise à une force ou résistance, tendant constamment à la ramener vers la droite. On dispose, dans ce cas, deux cliquets d'arrêt b, b_1, dont l'un b vient buter contre une dent de la tige, pendant que l'autre b_1 se trouve au milieu de l'intervalle de deux dents. c et c_1 sont deux autres cliquets, solidaires, l'un de l'autre, et disposés, par rapport aux dents, comme les précédents. Si ces cliquets c et c_1 reçoivent, dans le sens de la flèche, un mouvement alternatif et simultané, d'amplitude inférieure à une demi-division, ils se borneront à glisser respectivement sur les dents f_1 et f_2, sans communiquer aucun mouvement à la tige. Si, au contraire, le chemin s, décrit par ces cliquets, est un peu plus grand qu'une demi-division, $\frac{1}{2}$ t, le cliquet c glisse simplement sur la dent f_1, mais le cliquet c_1, arrivé à l'extrémité de f_2 retombe; il continue ensuite à avancer d'une longueur égale à $s - \frac{t}{2}$. Dans le mouvement inverse qui suit, les cliquets marchent d'abord à vide de $s - \frac{t}{2}$. Mais, à cet instant, c_1 atteint la saillie de la dent f_2 et la tige est entrainée vers la gauche de $\frac{t}{2}$. Il résulte de ce déplacement que b_1 tombe en c_2 et que b vient se placer au milieu de la division c. Dans le mouvement qui suit immédiatement, vers la droite, la tige se trouve donc maintenue par b_1. On voit que, de cette façon, l'avance se fait toujours par demi-division.

Si l'on voulait, d'une manière générale, régler l'avance au n^e d'une division t, il faudrait employer n cliquets d'arrêt et n cliquets mobiles et faire mouvoir ceux-ci d'une quantité légèrement supérieure à $\frac{t}{n}$.

Ces dispositifs, qui permettent de faire avancer une tige d'une fraction quelconque de division, peuvent être utilisés dans les cas où, l'avance à donner à la tige étant très faible, les divisions seraient trop rapprochées pour qu'on pût faire usage de la solution précédente, dans laquelle l'avance correspond chaque fois à une division entière.

Encliquetage à action continue.

Fig. 9, pl. XXXIX. a est une tige dentée, c c_1 un levier, mobile autour de l'axe c et pouvant recevoir un mouvement alter-

natif; b b_1 sont deux cliquets, dont l'un agit par traction, l'autre par pression. Si le levier c c_1 tourne, dans la direction des flèches, d'une quantité telle que les extrêmités h, h_1 parcourent une demi-division, la tige a avance, sous l'action du cliquet h_1, d'une demi-division, vers la gauche; mais, dans ce mouvement, h se déplace d'une demi-division vers la droite et f_1 d'une demi-division vers la gauche; le déplacement relatif de h, par rapport à f_1, sera donc d'une division entière. Si maintenant c c_1 tourne, en sens opposé, d'une quantité telle que h fasse avancer la dent f_1 d'une demi-division vers la gauche, h_1 tombe en g_1 et ainsi de suite.

On peut donc, à l'aide de ce dispositif, déterminer des avances consécutives par demi-division, sans qu'il soit besoin d'aucun cliquet d'arrêt.

Il est assez rare qu'on ait à appliquer les encliquetages au mouvement des tiges droites, et on les emploie le plus souvent pour communiquer le mouvement à des roues. Les explications que nous venons de donner s'appliquent d'ailleurs naturellement aux roues à rochets.

Machines à aléser.

Les machines, qu'on emploie pour l'alésage des cylindres creux de grandes dimensions, consistent essentiellement en un arbre horizontal robuste (l'arbre d'alésoir), sur lequel est disposé un plateau, en forme de disque (la tête d'alésoir), qui, tout en partageant le mouvement de rotation de l'arbre, se déplace lentement le long de cet arbre; sur la circonférence du plateau sont disposés les outils d'alésage. Pour aléser un cylindre, on commence par le placer exactement concentrique à l'arbre et on dispose les outils, de manière à ce qu'ils puissent mordre sur la paroi intérieure. Cela fait, on met l'arbre en mouvement. Les tranchants des outils décrivent, sur la surface intérieure qu'ils entament, des spirales à pas assez faible pour ne former, en réalité, qu'une surface cylindrique continue.

Premier dispositif d'alésoir.

Fig. 10, pl. XXXIX. L'arbre a, supporté par des paliers, entraine dans sa rotation le plateau b, qui peut se déplacer lui-

même le long de l'arbre. Dans les traverses c_1, c_1, montées sur l'arbre, tournent les vis c, c, dont les extrémités s'engagent dans des écrous, ménagés dans le plateau d'alésage. d, d sont deux pignons, reliés aux vis c, c; e et f deux roues, reliées par un arbre creux et tournant librement autour de l'arbre a; g est une roue dentée, calée sur l'arbre a. h et i sont deux autres roues engrènant avec g et f et montées sur un arbre creux; ces roues tournent sur un pivot ménagé sur le bâti.

Si l'on désigne par d, e, f, g, h, i les rayons de ces diverses roues, on voit que la roue e fera un nombre de tours égal à $\frac{h}{g}\frac{i}{f}$, pour un tour de l'arbre a. La vitesse de rotation de la roue e, par rapport à celle de l'arbre a, sera donc de $\left(1-\frac{g}{h}\frac{i}{f}\right)$ tours; par suite, le nombre des révolutions de d, pour un tour de a, sera $\left(1-\frac{g}{h}\frac{i}{f}\right)\frac{e}{d}$. Si l'on désigne, par ε, le pas de l'hélice de c et, par x, l'avance du plateau. pour une tour de a, on aura, par conséquent:

$$x=\varepsilon\left(1-\frac{g}{h}\frac{i}{f}\right)\frac{e}{d}.$$

Deuxième dispositif.

Fig. 11, pl. XXXIX. Dans cet appareil, l'arbre a, supporté par les paliers d, d, est entaillé et porte, à l'intérieur, une vis c passant dans un écrou, ménagé sur le plateau porte-outil b. L'arbre a se prolonge jusqu'à la roue g; quant à la vis c, elle traverse d, e, f et g, mais, dans cette dernière partie, elle n'est plus filetée; e est une roue immobile, fixée sur le bâti, f un bras de manivelle, calé sur l'arbre a, g une roue fixée sur le prolongement de la tige filetée c; enfin h et k sont deux roues, montées sur un arbre tournant dans un coussinet, établi à l'extrêmité du bras de manivelle f; g et h sont en prise, de même que e et k.

Si l'axe a fait un tour, le bras de manivelle f tourne d'une circonférence et la roue k roule sur la roue fixe e et opère, par suite, autour de son axe $\frac{e}{k}$ révolutions. Mais, en vertu de la liaison, de h et de k, h fait également $\frac{e}{k}$ tours, en même temps

qu'il tourne une fois autour de g; il en résulte que g effectue $\left(1 - \frac{e}{k}\frac{h}{g}\right)$ révolutions. La rotation relative de c par rapport à a est donc $\frac{e}{k}\frac{h}{g}$ et si on désigne par ϵ la valeur du pas de la vis c, par x l'avance du plateau, pour une rotation de a, on aura:

$$x = \epsilon \frac{e}{k}\frac{h}{g}.$$

Mouvements parallèles.

Il arrive souvent qu'on a besoin d'assurer à un corps des mouvements tels que, dans toutes ses positions, il reste exactement parallèle à lui-même. Il suffit, pour cela, que deux ou trois points du corps soient astreints à des mouvements identiques. Si le corps a une face plane et que son mouvement doive se produire dans le plan de cette face, il suffit d'assurer l'identité des mouvements pour deux points. Si le corps ayant une face plane, son mouvement doit s'effectuer suivant une direction perpendiculaire à cette face, il faut que trois points, au moins, aient des mouvements identiques.

Les appareils, propres à assurer ces conditions, sont naturellement en très grand nombre. Nous nous bornerons à en indiquer quelques-uns.

Parallélogramme articulé.

Fig. 12, pl. XXXIX. Cet appareil, autrefois employé pour le tracé des dessins, peut également trouver quelques applications dans les machines.

Appareil à cordons.

Fig. 13, pl. XXXIX. Une pièce a porte quatre petits galets c, d, c_1, d_1; b, b_1, e, e_1, sont des points fixes, b c d e, b_1 c_1 d_1 e_1 des fils tendus. Le premier empêche la pièce de tourner à droite, le second à gauche. Cet appareil peut servir pour le tracé des lignes droites dans les épures à grande échelle. On en fait également usage, dans les *Mull-Jenny* des filatures, pour guider la navette.

Appareil à lever les vannes avec encliquetage.

Fig. 14, pl. XXXIX. a est la vanne qui se trouve suspendue par les chaines b b, s'enroulant sur deux tambours c c. L'arbre d d est muni d'une roue à rochet e, qu'on met en mouvement à l'aide d'un levier, non représenté sur la figure. Un cliquet d'arrêt empêche la vanne de redescendre.

Appareil avec crémaillères.

Fig. 15, pl. XXXIX. La vanne a porte deux crémaillères b b, engrenant avec les roues c c; celles-ci sont calées sur un arbre d, auquel on communique le mouvement à l'aide de la manivelle e. Pour les vannes très lourdes, on a recours à des engrenages intermédiaires.

Appareil à vis.

Fig. 16, pl. XXXIX. La vanne a porte deux tiges filetées. b b, dont les écrous sont munis de roues d'engrenages c c. Un arbre e, sur lequel sont calés une manivelle et deux pignons d d, sert à commander la vanne. Comme la direction de l'arbre ne doit pas rencontrer celle des vis b b, les roues c, d, c, d, au lieu d'être de simples roues coniques, ont une section hyperbolique et leurs dents présentent une certaine inclinaison.

Appareils d'embrayage et de débrayage.

On désigne, sous ce nom, les dispositifs qui permettent de supprimer ou de rétablir la liaison entre deux organes d'une machine. Quelques-uns des dispositifs, dont nous donnerons plus loin la description, ont pour fonction, non pas simplement de débrayer, mais encore de changer le sens du mouvement de certaines pièces; ils peuvent donc servir à transformer des mouvements de rotation continus en mouvements de rotation alternatifs.

Poulies folles.

Fig. 17, pl. XXXIX, a est l'arbre moteur d'une machine-outil, b et c deux poulies, dont la première est calée sur cet

arbre, tandis que la seconde est folle, c'est-à-dire peut tourner librement; l'arbre de transmission d, sur lequel est pris le moumement de la machine, porte un tambour e. Lorsqu'on veut faire marcher l'arbre a, on fait passer la courroie sur la poulie b et le tambour e. Si l'on veut débrayer, on déplace la courroie, soit à la main, soit avec la fourchette *f*, de manière à l'amener sur la poulie folle c. Ce dispositif a, dans la pratique, une grande importance, attendu qu'il permet, soit d'arrêter, soit de mettre en mouvement une machine, sans qu'il se produise aucun choc dans les organes.

Débrayage à renversement de marche.

Fig. 18, pl. XXXIX. L'arbre a doit pouvoir à volonté être maintenu au repos ou mis en marche, dans un sens ou dans l'autre. b est une poulie calée sur l'arbre a, c une poulie folle, tournant librement autour de cet arbre, d une deuxième poulie folle, dont le moyeu est relié à une roue conique e, *f* une roue calée sur l'arbre a, enfin g une roue intermédiaire, mobile autour d'un axe spécial h, engrenant à la fois avec les deux roues e et *f*.

Si la courroie de transmission passe sur la poulie folle c, l'arbre a reste en repos. Si la courroie est conduite sur la poulie b, l'arbre a se trouve commandé directement et les roues *f*, g, e, de même que la poulie d, sont simplement entrainées. Si, au contraire, la courroie est amenée sur la poulie d, l'arbre a sera commandé par l'intermédiaire des roues e, *f*, g, et tournera dans un sens opposé à celui qui correspondait à la commande par la poulie b. La vitesse de rotation de l'arbre a est d'ailleurs la même dans les deux cas.

Fig. 1, pl. XL. Ce dispositif se distingue du précédent en ce que les roues e et *f* sont de diamètres inégaux et que l'axe h porte deux roues g_1 et g_2, de diamètres différents, qui engrènent respectivement avec *f* et e. Il en résulte que la vitesse de l'arbre a est plus grande quand la courroie se trouve sur b que lorsqu'elle est sur d, car les rayons de e et g_2 sont égaux, tandis que le rayon de g_1 est plus petit que celui de *f*.

Embrayage à trois poulies.

Fig. 2, pl. XL. L'arbre a, sur lequel on veut agir, porte deux poulies, b et c, dont la première est folle. En d est une

troisième poulie, tournant librement autour de a et munie d'un engrenage intérieur; e est un pignon monté sur l'arbre a, f une roue intermédiaire, mobile autour de l'axe g et engrenant à la fois avec les deux roues e et d.

Lorsque la courroie se trouve sur la poulie b, l'arbre a est arrêté; si la courroie est amenée en c, l'arbre a est commandé directement; enfin, si la courroie vient en d, l'arbre a se trouve commandé par l'intermédiaire des engrenages. Dans ce cas, le sens du mouvement de a est opposé à celui qui résulterait de la commande par c. Lorsque la courroie actionne la poulie d, la vitesse de rotation de a est plus grande que dans le cas de la commande directe par c. Le rapport des vitesses se trouve d'ailleurs déterminé par le rapport des rayons de l'engrenage intérieur et du pignon e.

Embrayage avec roue intermédiaire.

Fig. 3, pl. XL. a et b sont deux arbres parallèles, que l'on veut pouvoir commander à volonté, l'un par l'autre; A et B sont deux roues calées sur ces arbres. Une troisième roue intermédiaire C est mobile sur un axe c, à l'extrémité du levier D, qui peut lui-même tourner autour de b. C est toujours en prise avec B et participe à la rotation de b; quant à l'arbre a, il se trouve arrêté ou entraîné, suivant que le levier occupe la position D_1 C_1 ou la position D C.

Débrayage de roues dentées, au moyen d'une vis.

Fig. 4, pl. XL. Le débrayage de deux roues dentées peut s'effectuer en déplaçant, le long de son axe, une des deux roues.

La roue b est maintenue sur l'arbre a par un prisonnier, de façon à être toujours entrainée dans le mouvement de rotation de cet arbre, tout en conservant la possibilité de se déplacer longitudinalement d'une quantité légèrement supérieure à la largeur des dents; d est un arbre creux, monté sur l'arbre a et terminé extérieurement par une vis à filet carré; cet arbre est fixé à la roue b; e est un collier à section hexagonale, formant écrou à l'intérieur. Cette pièce est reliée à a par le manchon g, de telle sorte qu'elle peut tourner autour de cet arbre, mais sans pouvoir se déplacer longitudinalement.

Si l'on fait tourner le collier e à l'aide d'une clef, l'arbre creux d et, par suite, la roue b se trouvent déplacés lentement, dans le sens de la longueur de l'arbre. On réalise ainsi un mode d'embrayage convenable, mais qui ne peut fonctionner que pendant l'arrêt de la machine.

Embrayages par cônes de friction.

Fig. 5, pl. XL. L'arbre a, sur lequel on veut agir, porte une poulie folle, dont l'intérieur est muni d'un cône; d est un second cône avec manchon, qui peut tourner avec l'arbre a et, en même temps, se déplacer lentement et d'une petite quantité suivant sa longueur, de telle sorte que les surfaces des cônes d et e puissent arriver en contact; f est un levier muni d'une fourchette et que l'on commande à l'aide d'une vis g.

En faisant tourner le levier f, soit dans un sens, soit dans l'autre, on rapproche les deux cônes ou on les écarte l'un de l'autre. Dans le premier cas, la poulie b est rendue solidaire de l'arbre a, tandis qu'elle reste folle dans le second.

Débrayage avec cônes et manchons dentés.

Fig. 6, pl. XL. L'arbre a tourne d'un mouvement continu, et la poulie b se trouve entrainée par cet arbre ou reste folle, suivant la position des autres parties du mécanisme. La poulie b peut donc servir à transmettre à volonté le mouvement à un autre arbre. Cette poulie porte un manchon à dents c et un cône d, sur lequel peut se serrer un second cône e, portant un manchon f, muni de deux gorges tournées. Le manchon f est entraîné par l'arbre a. tout en restant susceptible de déplacements suivant la longueur. En g se trouve un second manchon denté, susceptible également de glisser sur l'arbre, tout en partageant son mouvement de rotation. Les manchons sont reliés par deux fourchettes h et i et les tringles k et l. Enfin le levier m embrasse, par deux saillies, la gorge extérieure du manchon f.

Si on déplace légèrement le levier vers la droite, le contact entre les cônes d et e est supprimé, la partie c b d n'est plus solidaire de a et la poulie b fonctionne comme poulie folle. En reportant le levier vers la gauche, les cônes se retrouvent pressés l'un contre l'autre et la poulie b devient solidaire de l'arbre a,

sans que cette liaison présente toutefois une sécurité parfaite. Mais si, lorsque la poulie b a pris la vitesse de a, on porte rapidement le levier m vers la droite, le cône e cesse d'agir et, les dents des manchons g et c se trouvant en prise, la liaison de b avec a est complète. Avec un peu l'habitude de cette manœuvre, on peut mettre la poulie b en marche, sans donner lieu à aucun choc.

Débrayages avec frein et manchons.

Fig. 7, pl. XL. On veut établir ou supprimer à volonté la liaison entre l'arbre a, qui tourne constamment, et l'arbre b; c et d sont deux tambours, le premier calé sur b, le second fou sur l'arbre a. Autour de ces tambours s'enroule une bande de frein e, qui peut être serrée de façon à agir par frottement sur les deux circonférences. Le tambour d porte un manchon à dents f; en g se trouve un second manchon, entraîné par l'arbre a, mais pouvant se déplacer longitudinalement, grâce au levier h. Dans la position représentée fig. 7, l'arbre b est débrayé; mais si, l'arbre a étant en marche, on déplace le manchon g vers la gauche, ce manchon vient en prise avec les dents de *f*, qu'il entraîne dans son mouvement; le frottement détermine l'entraînement du frein e et, par suite, des pièces c et b. Ce dispositif permet de mettre l'arbre b en marche, avec une vitesse progressivement croissante.

Embrayages par manchons.

Fig. 8, pl. XL. a est un arbre, animé d'un mouvement de rotation, que l'on veut transmettre à l'arbre b, soit dans un sens, soit dans l'autre. L'arbre a porte deux roues coniques égales c et d, folles sur lui et munies de manchons à dents e et *f*. Entre ces manchons s'en trouve un troisième g h, pouvant se déplacer le long de l'arbre, tout en partageant son mouvement de rotation. Pour déterminer ces déplacements, on fait usage du levier i, dont les fourchettes s'engagent dans une gorge du manchon. Enfin sur b est montée une roue conique k, dont les dents, non figurées sur le dessin, engrènent avec celles de c et d. Lorsque le manchon occupe la position représentée sur la figure 8, il n'est en prise avec aucun des deux manchons e et *f*; par suite, les roues c et d restant immobiles, l'arbre b est au repos.

Si, au contraire, on fait mouvoir le manchon g h, de telle sorte que h engrène avec f, ou g avec e, l'arbre b se trouve commandé, dans le premier cas, par les roues d et k, dans le second, par les roues c et k. Le sens de la rotation est d'ailleurs inverse dans les deux cas.

Débrayages à frein et roues différentielles.

Fig. 9, pl. XL. L'arbre moteur a tourne d'une manière continue et la roue dentée b commande une machine-outil, non représentée sur la figure. Cette machine sera donc en action ou en repos, suivant que la roue b elle-même sera en mouvement ou immobile; sur l'arbre a est calée une roue conique c; d est un arbre creux, fou sur l'arbre a et portant la rone conique e et la roue droite b; f et g sont deux roues coniques, engrènant avec c et e et mobiles autour d'axes portés par un tambour h. Ce tambour tourne librement sur l'arbre a et reçoit à sa circonférence la bande d'un frein, qu'on peut serrer plus ou moins à l'aide d'un levier.

En serrant le frein, on maintient immobile le tambour h, qui ne joue plus alors que le rôle de support pour les axes des roues f et g; ces roues fonctionnent alors comme roues intermédiaires pour transmettre le mouvement de a et c à e, d, b. La roue b et la machine-outil qu'elle actionne sont alors en mouvement. Si, au contraire, on desserre le frein et si le tambour reste libre, les roues b et e se trouvent arrêtées par la résistance de la machine outil; les roues f et g se bornent à rouler autour de e, le tambour h tournant lui-même autour de a. La machine outil est alors au repos.

Embrayage avec frein et roue planétaire.

Fig. 10, pl. XL. L'arbre a, qni est animé d'un mouvement continu, porte un pignon b et un tambour fou c, entouré d'une lame de frein, que l'on peut manœuvrer à l'aide du levier d. En e est un axe solidaire de c et portant une petite roue f; g est une poulie, folle sur l'arbre a et portant intérieurement une denture d'engrenage h. Les dents de la roue intermédiaire f engrènent, d'un côté avec h, de l'autre avec b.

Si l'arbre a est en mouvement et qu'on arrête c à l'aide du frein, le rôle de la pièce c se borne à maintenir le tourillon e;

le mouvement de a se trouve alors transmis par b et *f* à h et g. La poulie g joue, dans ce cas, le rôle de poulie menante. Si, au contraire, le tambour c est libre, g reste immobile, la pièce *f* roule sur l'engrenage intérieur h, en entrainant la poulie du frein c dans son mouvement autour de l'axe a.

Accouplement de machines motrices.

Lorsque deux machines motrices, de nature très-différente, comme une turbine et une machine à vapeur, par exemple, doivent agir simultanément sur un arbre de transmission commun, il convient de disposer l'installation de telle sorte qu'aucune des deux machines ne puisse entrainer l'autre. La fig. 11, pl. XL, représente un accouplement de cette espèce. a est l'arbre de la turbine, b celui de la machine à vapeur et c l'arbre auquel sont transmis les efforts des deux moteurs; d et e sont deux arbres intermédiaires, reliés à l'arbre c par les roues dentées h, f, g; i et k sont deux roues à encliqnetage montées sur d et e; l et m sont deux bras de manivelle, actionnés par b et a. Sur ces bras sont fixés, à l'aide de tourillons, des cliquets n et p, maintenus contre les roues par des ressorts en acier. —

Le jeu de cette disposition est facile à comprendre:

1°, Si la rotation des arbres a et b s'effectue avec la même vitesse, suivant la direction des flèches, les cliquets n et p agissent sur les dents des roues et les entrainent; le mouvement des deux machines se transmet donc dans ce cas à l'arbre c.

2°, Si, au début, les machines étant au repos, on les met simultanément en marche, c'est-à-dire si l'on fait arriver à la fois la vapeur dans le cylindre et l'eau dans la turbine, les deux moteurs agissent à la fois sur l'arbre c.

3°, Si, les machines étant en repos, on en met d'abord une seule en marche, par exemple, la turbine, cette machine pourra commencer à donner un mouvement lent et ensuite, la machine à vapeur étant mise en marche, le mouvement s'accélérera jusqu'à ce que le cliquet, commandé par la machine à vapeur, arrive à fonctionner.

4°, Si les machines fonctionnant régulièrement depuis un certain temps, l'une d'elles, par exemple la machine à vapeur, vient à développer subitement nne travail plus considérable la vitesse de l'arbre c augmentera. Le rochet de la turbine

s'éloignera du cliquet qui le commandait; cette turbine n'aura plus rien à mener et son mouvement s'accélèrera, jusqu'à ce que l'action de son cliquet puisse reprendre de nouveau.

Ce simple exposé suffit pour faire comprendre les nombreux services que les installations de ce genre peuvent rendre dans la pratique.

SIXIÈME SECTION.

Machines mues par la force de l'homme.

L'homme et les animaux considérés comme moteurs.

L'organisme de l'homme, comme celui de l'animal, est facile à expliquer, lorsqu'on le compare à la disposition et au mode d'action d'une machine compliquée, ou plus simplement lorsqu'on le considère comme une machine d'une disposition spéciale. Au point de vue sentimental, une telle comparaison semble tout d'abord devoir être repoussée, en raison de l'espèce d'indignité qui pourrait en résulter pour l'homme. Mais une pareille crainte est sans aucun fondement, car entre l'homme et la machine il existe évidemment cette différence radicale, que le premier est un être susceptible de sensations, doué de la faculté de penser et de vouloir, tandis que la machine ne se compose que de corps inorganiques, inanimés, dépourvus de la faculté de sentir. La comparaison de l'organisme humain avec une machine se réduit donc, en définitive, à celle de certaines dispositions qui se rencontrent dans les êtres animés, abstraction faite de la sensation, de la pensée et de la volonté.

De même qu'une machine complexe se compose de différents mécanismes de mouvement, dont chacun remplit une fonction spéciale dans le travail d'ensemble, que cette machine doit fournir, de même l'organisme humain renferme une série de dispositifs, dont chacun correspond à une fonction déterminée:

Mais, dans une machine, on ne rencontre que des mécanismes de mouvement proprement dits; les corps qui la com-

posent n'éprouvent, à l'intérieur, aucune modification mécanique ou chimique; les surfaces extérieures seules sont soumises à quelques altérations, d'ailleurs peu importantes, dues soit à l'action des frottements, soit à celle de l'atmosphère.

L'organisme humain, au contraire, à côté d'un grand nombre de mécanismes de mouvement, présente encore de nombreuses dispositions correspondant à d'autres fonctions et toutes ses parties, continuellement soumises à différentes modifications mécaniques et chimiques, n'ont, en réalité, aucune durée; constamment décomposées par les actions chimiques, elles doivent sans cesse être remplacées par de nouvelles formations.

La machine, pour se conserver, n'a besoin d'absorber aucune matière et elle n'en élimine également aucune pendant sa marche; l'organisme, au contraire, ne peut subsister sans absorption de matière; il doit en recevoir constamment pour remplacer celle qui est devenue impropre et qui est rejetée.

L'organisme est donc une machine qui se détruit et se reconstruit sans cesse.

L'absorption des matières constitue l'acte de la nutrition. Ces matières, introduites dans la bouche, sont broyées avec les dents et mélangées avec la salive; elles passent ensuite dans l'estomac, où elles se trouvent en contact avec des sucs dissolvants et se divisent enfin entre plusieurs canaux, dont les parois possèdent la propriété d'enlever à la matière, ainsi préparée, les éléments propres à la reconstruction des organes, de les absorber et de les distribuer aux différents points de l'organisme; les parties impropres sont éliminées. Cet acte de la nutrition du corps a encore un autre but à remplir; les réactions chimiques qui l'accompagnent développent de la chaleur, dont une partie s'échappe du corps, à l'état de chaleur sensible, tandis que l'autre partie donne naissance aux forces, dont l'organisme vivant est susceptible. A ce point de vue, on peut comparer l'organisme à une machine à vapeur ou, plus exactement, à une machine calorique, dont la propriété essentielle consiste dans la transformation de la chaleur absorbée en travail mécanique disponible.

D'après les calculs des chimistes et des physiologistes, on peut admettre que, pour l'acte de la nutrition, un homme, de force moyenne, consomme journellement $0^{kil}2514$ de Carbone et $0^{k}.01256$ d'Hydrogène, qui se transforment en acide carbonique et en eau, c'est-à-dire qui brûlent, en se combinant avec l'oxygène de l'air respiré.

La combustion d'un kilogramme de carbone développant 7050 unités de chaleur et celle d'un kilogramme d'hydrogène 34500, il en résulte que les quantités précédentes correspondent à une production de chaleur de $0,2514 \times 7050 + 0,01256 \times 34500 = 2207$ unités et, comme chaque calorie est équivalente à un travail mécanique de 424 kilogrammètres, on voit qu'en définitive l'alimentation journalière d'un homme a pour résultat de permettre la production d'un travail équivalent à $2207 \times 424 = 935768$ kilogrammètres.

L'expérience prouve qu'un homme ne peut pas travailler, sans inconvénient pour sa santé, plus de 8 heures sur 24, et que, dans ces conditions, il peut développer un travail de $7^{kgm}{\cdot}2$ par seconde. Le travail total qu'un homme peut donner par jour n'est donc, d'après cela, que de $8 \times 3600 \times 7,2 = 207360$ kilogrammètres, ou approximativement $\frac{1}{4{\cdot}5}$ de celui qui correspond à la quantité de chaleur dévoloppée par l'alimentation.

L'organisme humain est donc, en réalité, une machine calorique qui donne un travail mécanique utile de $\frac{100}{4\,5} = 22\%$, tandis que (ainsi que nous le verrons dans la suite) une machino à vapeur, dans les conditions les plus favorables ne peut utiliser que $\frac{100}{20} = 5\%$ de la chaleur du combustible. La chaleur qui n'est pas utilisée comme travail, et qui est do $100 - 22 = 78\%$, se divise en deux parties, dont l'une s'échappe du corps à l'état de chaleur sensible, tandis que l'autre est employée à d'autres fonctions.

Le travail mécanique, que peut dévolopper un être animé, est évidemment variable avec une foule de circonstances; les principaux éléments, qui influent sur la quantité de travail, sont 1°, le sexe, 2°, l'âge, 3°, la constitution, 4°, le climat, 5°, l'exercice et l'habitude, 6°, l'espèce de travail et 7°, surtout la vitesse qu'il faut déployer pendant la travail pour vaincre la résistance.

Il n'existe aucune théorio rationnelle qui permetto d'introduire, dans le calcul, l'influence de ces divers éléments et de déterminer ainsi la quantité de travail que peut exécuter un individu donné; il est cependant possible de déterminer approximativement cette quantité.

On peut admettre que le travail, que peut développer en un jour un individu déterminé, jouissant d'une alimentation convenable, atteint son maximum, lorsque, dans l'espace de 24 heures,

il travaille pendant T heures et que, dans chaque seconde de la période d'action, il surmonte une résistance de K kilogrammes avec une vitesse de C mètres par 1". En désignant par W ce maximum d'action, on a:

$$W = 3600 \text{ K C T kilog.mèt.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

La durée T du travail, la plus avantageuse, peut être estimée, pour l'homme et les animaux, à 8 heures; quant aux valeurs de K et de C qu'il convient également de prendre, pour obtenir le maximum d'action, elles ont été déterminées, par expérience, pour différents individus et sont contenues dans le tableau suivant:

Individus.	Poids.	Mode d'action.	K	C	K C
	kilg.		kilog.	Mètres.	Kilogrmèt.
Homme	70	sans machine . . .	14	0·8	11
		sur un levier . . .	5	1·1	5·5
		sur une manivelle . .	8	0·8	6·4
		au moyen d'un manège	12	0·6	7·2
		sur une roue à chevilles	12	0·7	8·4
		vers le bas de la roue ou à 24⁰	60	0·2	12
Cheval	280	sans machine . . .	56	1·3	73
		au moyen d'un manège	44	0·9	40
Bœuf	280	sans machine . . .	60	0·8	48
		au moyen d'un manège	65	0·6	39
Mulet	234	sans machine . . .	47	1·1	52
		au moyen d'un manège	30	0·9	27
Ane	168	sans machine . . .	37	0·8	30
		au moyen d'un manège	14	8·0	11

Si la durée du travail journalier est de Z heures, au lieu de T, et la vitesse de travail V mètres par seconde, l'effort P, que peut vaincre un moteur animé, est donné approximativement par l'expression suivante, établie par *Gerstner*:

$$P = \left(2 - \frac{V}{C}\right)\left(2 - \frac{Z}{T}\right) K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et la quantité de travail journalier devient dans ce cas:

$$W_1 = 3600 \text{ P V Z} = 3600 \left(2 - \frac{V}{C}\right)\left(2 - \frac{Z}{T}\right) \text{K V Z} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Cette valeur empirique de P repose sur ce fait d'observation, que, quand la vitesse V du travail devient égale au double de celle qui est considérée comme la plus avantageuse, un moteur animé est dans d'aussi mauvaises conditions, pour surmonter une résistance continue, même très faible, que si la durée du travail Z devenait elle-même deux fois plus considérable que T.

Pour un travail, qui s'exécute avec la vitesse moyenne C et pendant de courts intervalles de temps, séparés par de longs repos, on peut prendre:

$$V = C, \quad Z = 0$$

et alors, en vertu de l'équation (2), on a pour l'effort P:

$$P = 2\,K$$

Cette valeur peut être employée dans le calcul du travail des cabestans et des grues, appareils qui ne sont mis en mouvement que de temps en temps. Pour un travail de cette nature, $K = 8$ et, par suite, $P = 2\,K = 16$ kilogrammes.

La plus grande résistance qui puisse être surmontée, pendant un temps très court, et avec une faible vitesse, est donnée par l'équation (2), lorsqu'on y fait $V = 0$, $Z = 0$; on trouve ainsi $P = 4\,K$, ou, pour un homme, $4\,K = 32$ kilg

Il est naturel que nous ne nous occupions ici que de l'activité déployée par l'homme comme travailleur, quand il gagne sa vie à la sueur de son front, sans détruire sa santé. Pour le but que nous nous sommes proposé, nous n'avons pas à examiner le développement des forces humaines au point de vue intellectuel.

Valeur pratique de l'homme et des animaux comme moteurs.

Parmi les aliments, susceptibles d'entretenir un homme en bon état de santé, les plus économiques ont, à égalité de poids, un prix de 20 à 30 fois supérieur à celui du charbon; cependant l'action calorifique, développée par un kilogramme d'aliments n'est pas plus grande que celle qui correspond à la combustion d'un kilogramme de charbon; on peut même dire qu'au point de vue de la production de force, cette dernière source l'emporte sur l'autre, car l'acte de la nutrition exige la présence d'une certaine quantité d'azote. On peut donc admettre que, comme

substances motrices, les aliments sont de 20 à 30 fois plus chers que le charbon. Si l'organisme hnmain, considéré comme puissance motrice, présentait le même degré d'infériorité qu'une machine à vapeur, on devrait en conclure que la force produite par les aliments, au moyen de cet organisme, exige une dépense de 20 à 30 fois plus considérable que celle qu'on obtient du charbon par l'intermédiaire d'une machine à vapeur. Mais l'organisme de l'homme utilise $\frac{1}{4 \cdot 5}$ de la chaleur que renferme la substance des aliments, tandis que, dans les meilleures machines à vapeur, le rendement correspond à peine à $\frac{1}{20}$ de la chaleur du combustible. Il en résulte, en définitive, qu'au point de vue de la force réellement disponible, la dépense qu'exige l'emploi du corps humain comme moteur est à celle qu'entraine l'emploi d'une machine à vapeur dans un rapport qui varie de $20 \times \frac{4 \cdot 5}{20} = 4 \cdot 5$ à $30 \times \frac{4 \cdot 5}{20} = 6 \cdot 8$.

Il est permis d'espérer que, dans l'avenir, grâce à des perfectionnements successifs, les machines caloriques arriveront à ne consommer que le quart ou le cinquième de la quantité de combustible des machines à vapeur actuelles, c'est-à-dire qu'au point de vue de la transformation de la chaleur en travail, elles seront équivalentes à l'organisme humain et, dans ce cas, au point de vue de la dépense, la production de la force par des combustibles, dans une machine calorique, serait 20 ou 30 fois plus économique.

Ainsi donc, la force que fournit l'homme entraine une dépense qui, déjà maintenant, est environ 6 fois celle de la force produite par le charbon et qui, dans l'avenir, peut devenir de 20 à 30 fois plus considérable que cette dernière. Cette conclusion n'est évidemment nullement modifiée par cette circonstance que la production de la force par le combustible exige l'intermédiaire d'une machine, car l'homme lui-même ne peut travailler le corps nu; en dehors des aliments, il a besoin de vêtements, de logement; de plus, pour se maintenir en bon état de santé, il doit prendre du repos et se procurer certaines jouissances intellectuelles et tout cela se traduit par une certaine dépense.

Abstraction faite de ce que réclament le sentiment, la religion et la philosophie, l'égoïsme et l'intérêt, bien entendus, se réunissent pour nous conseiller de renoncer à l'emploi de l'homme, comme moteur, toutes les fois qu'il est possible de le remplacer par un moteur animé.

Dans l'antiquité, en l'absence de toutes connaissances physiques, chimiques et mécaniques, on ne soupçonnait pas l'existence de forces naturelles susceptibles d'accomplir la plupart des travaux nécessaires à l'existence des sociétés; de là la généralisation du travail des esclaves qui, s'il n'a pas de nos jours complètement disparu partout, n'est plus du moins regardé comme indispensable et ne tardera pas à être abandonné là où on le maintient encore par des moyens factices.

La connaissance des lois de la nature et le christianisme, en faisant prévaloir cette vérité que le travail devait être le produit d'une activité libre, ont conduit à admettre que la force de l'homme ne devait pas être employée comme simple force motrice et qu'il fallait la réserver pour les travaux qui, en dehors de l'effort purement physique, exigent le concours de l'intelligence et ne peuvent pas, par suite, être effectués par une machine. C'est ainsi que le travail des jardins ne peut s'effectuer que par la main de l'homme, tandis que, pour la culture des champs, il se contente de diriger la marche des animaux de trait.

Les gigantesques travaux, qu'exige l'installation des voies ferrées, s'exécutent, en partie par les animaux de trait; mais pour beaucoup d'entre eux, on est obligé de recourir au travail de l'homme, car on n'a pas encore trouvé, et on ne trouvera peut être jamais, le moyen d'appliquer à leur exécution un moteur inconscient de nature inorganique. Dans les usines et les fabriques, l'homme n'est plus guère employé comme simple moteur; il est généralement réservé pour les travaux qui ne peuvent être exécutés mécaniquement ou, encore, pour guider et diriger une machine mise en mouvement par l'eau ou la vapeur. L'homme est le moteur le plus faible et le plus couteux, mais il est en même temps le seul moteur pourvu d'intelligence; il constitue, pour ainsi dire, une machine universelle, susceptible d'une variété infinie de mouvements. C'est un moteur qui se transporte lui-même au point où doit s'effectuer le travail, qui peut, à sa volonté, le commencer, l'interrompre ou le reprendre, qui, suivant les besoins, peut passer d'une occupation à une autre, qui sait triompher des obstacles imprévus, en un mot, c'est un moteur susceptible d'effectuer une très grande variété de travaux, qu'on ne pourrait demander à aucune autre force motrice.

Mais le travail de l'homme est désavantageux et doit être remplacé par l'action des machines, toutes les fois qu'il s'agit de travaux exigeant de très grands efforts ou une très grande uni-

formité. Ainsi, par exemple, dans les opérations de filage, de tissage, de tournage, de rabotage, etc., qui, pour fournir des résultats acceptables, exigent une très grande uniformité de mouvement, il convient de substituer le travail de la machine à celui de l'homme. On obtient ainsi, avec des appareils spéciaux, convenablement disposés, des produits d'une uniformité bien supérieure à celle que pourrait produire la main d'un ouvrier.

Machines mues de préférence par l'homme.

Le nombre des machines, au moyen desquelles on peut utiliser avantageusement le travail de l'homme, est évidemment très considérable. Dans ce qui va suivre nous examinerons de préférence celles de ces machines, qui permettent à la force de l'homme de vaincre de grandes résistances, ou de déplacer des charges considérables, avec de faibles vitesses. C'est dans cette classe qu'on peut faire rentrer les machines suivantes:

A. Mouvements horizontaux.

Rouleaux, Traineaux, Voitures, Brouettes, Plaques tournantes.

B. Mouvements verticaux.

Treuils, Poulies mouflées, Grues, Appareils élévatoires de toutes espèces.

C. Presses.

Presses à vis, Presses à coin, Presses à genoux, Presses hydrauliques.

Dans ces machines, le récepteur et l'opérateur sont extrêmement simples. Le récepteur se réduit soit à une manivelle, soit à un levier à poignée, soit à une bielle ou une pédale. L'outil ne se compose le plus souvent que d'une ou plusieurs pièces, destinées à saisir le corps, sur lequel doit s'exercer l'action du moteur.

Ordinairement, dans ces machines, où l'on doit surmonter une résistance considérable, avec une faible vitesse, le mécanisme

de mouvement se compose d'une série de pièces, qui ont pour double but de transformer le mode de mouvement du récepteur dans celui de l'opérateur, en réduisant la vitesse de ce dernier par rapport à celle du récepteur. Nous allons passer maintenant à la description et à la construction de ces divers appareils.

Treuils en bois.

Treuil à bras en croix.

Fig. 2 et 3, pl. XLI. Le support de ce treuil se compose d'un chassis inférieur a et de deux potelets b avec jambes de force. Sur ces potelets repose, au moyen de tourillons, un cylindre en bois c, qui est traversé par quatre bras également en bois et qui font entre eux des angles égaux. En un point de la circonférence du cylindre, à l'une des extrémités, est fixée une corde qui s'enroule sur ce cylindre, en même temps que se trouve élevée la charge, fixée directement ou indirectement à la corde. Si le treuil est employé pour retirer des charges d'une partie creuse ou d'un puits, on commence par recouvrir ce puits d'un petit pont, sur lequel on établit le treuil; on attache la charge à l'extrémité de la corde, que les ouvriers enroulent sur le cylindre, en agissant successivement sur les bras. Comme il n'est guère possible de faire agir à la fois plus de 4 ouvriers, il en résulte qu'avec ce treuil on ne peut soulever que des charges peu considérables.

Si l'on désigne par Q la charge à soulever, N le nombre des ouvriers, p l'effort moyen, que chacun d'eux exerce sur un bras, w le rayon du cylindre, l la longueur d'un bras, on a, en ne tenant pas compte des résistances accessoires (raideur de la corde, frottement des axes):

$$Q = N p \frac{l}{w}$$

Pour p = 16 kilg., N = 4, l = 1m, w = 0·125, on trouve Q = 512 kilg.

Lorsqu'un treuil de cette espèce doit servir à monter des matériaux de construction sur un échafaudage, on l'établit sur le sol, en le chargeant de pierres; la corde, fixée au cylindre par une de ses extrémités, va s'enrouler sur une poulie placée au-dessus de l'échafaudage, pour redescendre au niveau du sol, où

son extrémité libre porte un crochet, destiné à recevoir la charge à soulever.

Treuil à manivelles.

Fig. 4, pl. XLI. Le bâti de cet appareil est disposé comme celui du treuil précédent, mais les tourillons sont plus longs et se terminent par deux parties recourbées, en forme de manivelles, qui remplacent les bras. Les plans de ces manivelles doivent former un angle droit, puisque chaque ouvrier ne peut exercer réellement d'effort, sur une manivelle, que dans une direction horizontale. Sur chaque manivelle on ne peut faire agir au plus que deux ouvriers; dans ce cas, comme il n'y en a jamais que deux produisant, en même temps, un effort, on a:

$$Q = \frac{1}{2} N p \frac{l}{w}$$

en désignant par l le rayon des manivelles et par N le nombre total des ouvriers destinés à agir sur le treuil.

Pour $N = 4$, $p = 16$, $l = 0^m,36$, $w = 0{\cdot}12$, on trouve:

$$Q = 96 \text{ kilg.}$$

Nous pouvons faire remarquer ici que, dans ce treuil, le rayon des manivelles doit être compris entre 36 et 40 centimètres au plus, afin que le mouvement d'oscillation du corps ne devienne pas trop fatiguant pour les ouvriers.

Roue à chevilles.

Fig. 5, pl, XLI. Dans cet appareil le cylindre, sur lequel doit s'enrouler la corde, porte une ou plusieurs roues, dont les contours, ou les côtés, sont munis de chevilles, qui peuvent être saisies par des ouvriers. Des planchers, établis à différentes hauteurs, permettent à plusieurs ouvriers d'agir en même temps sur ce treuil et, comme le rayon de la roue peut être très grand, il en résulte que cet appareil peut servir à soulever des charges très considérables. Ce treuil est très fréquemment employé dans l'exploitation des mines et il porte, dans ce cas, le nom de roue d'extraction.

Roue à échelier.

Fig. 6, pl. XLI. Ce treuil se distingue du précédent par la disposition de la roue. Celle-ci se compose (comme dans les roues à augets) de deux couronnes circulaires, entre lesquelles sont fixées des planches, disposées en zigzag et qui deviennent horizontales dans les positions a et b. Les ouvriers se placent, soit à l'intérieur de la roue, en a, soit à l'extérieur, en b, et agissent par leur poids pour produire le mouvement. Cette machine peut d'ailleurs facilement donner lieu à des accidents même très-graves; aussi n'est-elle presque plus employée.

Treuil à axe vertical ou Bourriquet.

Fig. 7, pl. XLI. La charpente de cet appareil se compose de deux croisillons a et b, établis parallèlement et reliés par quatre potelets verticaux c, avec jambes de force. Dans l'axe de la charpente, et verticalement, est établi un cylindre, muni de tourillons à ses deux extrémités; à une hauteur de $1^m,30$ environ au-dessus du sol, ce cylindre porte 4, 6 ou 8 bras d et se termine par un tambour e, sur lequel s'enroule une corde qui vient passer sur une poulie guide *f*. Le croisillon inférieur est recouvert d'un plancher, sur lequel marchent les ouvriers, qui agissent tous en même temps sur les bras d du cylindre. Lorsque cet appareil a d'assez grandes dimensions et qu'il est muni d'un assez grand nombre de bras, il est possible de faire travailler simultanément plusieurs ouvriers (de 12 à 16); il importe, toutefois, de remarquer que cette disposition présente, comme inconvénient sérieux, l'absence complète de contrôle sur l'action spéciale de chaque ouvrier, puisque, sans exercer d'effort, chacun d'eux peut prendre la même position que celle qu'il occuperait en poussant de toutes ses forces.

Cabestan.

Fig. 8, pl. XLI. Cette machine est, comme la précédente, un treuil à axe vertical. L'axe se prolonge au-dessus du niveau supérieur du bâti, et ce prolongement porte quatre grands bras de leviers, sur lesquels agissent les ouvriers, en tournant en cercle autour du cylindre. Cet appareil est surtout employé sur les quais des rivières, pour amener les bâtiments près des bords. Dans ce cas, on doit le charger de pierres, pour empêcher le

renversement et le mettre à l'abri de l'entrainement au moyen de chevilles enfoncées dans le sol, en avant du bâti.

Tous les treuils de cette espèce peuvent s'installer partout, sans difficultés, et sont d'un prix peu élevé; mais ils ont l'inconvénient d'être volumineux, très lourds, d'un transport difficile et, de plus, ils ne donnent, en général, qu'une force de traction assez faible. Dans les petites constructions de toute nature, où ils sont employés comme machines auxiliaires, ils rendent de très bons services. Pour les constructions d'une grande importance, il convient de les remplacer par les treuils métalliques, que nous décrirons plus loin avec quelques détails.

Poulies mouflées.

La disposition des poulies mouflées est connue. Ordinairement les poulies sont établies dans une seule et même cage, à côté les unes des autres, et elles tournent librement autour d'un seul et même axe. Pour l'exposition de la théorie, dans le système représenté fig. 9 et 10, pl. XLI, nous avons supposé les poulies établies dans la même cage, mais chacune d'elles tournant autour d'un axe spécial. Si la corde était complètement flexible, sans raideur, et s'il ne se produisait aucun frottement dans les tourillons, toutes les parties de la corde devraient avoir une tension identique et, par suite, la tension P de la partie libre du cordage serait précisément égale à $\frac{Q}{2n}$, n désignant le nombre des poulies d'un même moufle. Mais, par suite de la raideur de la corde et du frottement des tourillons, la tension de cette corde, en supposant le mouvement uniforme, doit aller en croissant de l'intérieur à l'extérieur, car la différence des tensions de deux brins de corde, qui se suivent immédiatement, doit faire équilibre à la raideur et au frottement de l'axe de la poulie, qui est en contact avec les deux brins. Si on désigne par:

δ le diamètre de la corde,
d le diamètre du tourillon ou de l'axe, sur lequel se produit le frottement,
D le diamètre d'une poulie,
} exprimés en centimètres,

f le coefficient de frottement, applicable à l'axe ou au tourillon,
n le nombre des poulies d'un même moufle,
Q la charge à soulever,

P l'effort à l'extrémité libre de la corde,
T la tension du premier brin, fixé par son extrémité au moufle immobile,
T_1, T_2 .... les tensions des brins suivants,
k le rapport des tensions de deux brins consécutifs,

On trouve facilement, pour valeur approximative de k:

$$k = 1 + 0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f \frac{d}{D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ce rapport est constant pour deux brins consécutifs, si on suppose que toutes les poulies soient égales, ainsi que les axes ou les tourillons, sur lesquels se produisent les frottements.

On a dans ce cas:

$$\left.\begin{array}{lll} T_1 & = k\,T & \\ T_2 & = k\,T_1 & = k^2\,T \\ T_3 & = k\,T_2 & = k^3\,T \\ T_4 & = k\,T_3 & = k^4\,T \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{2n-1} & = k\,T_{2n-2} & = k^{2n-1}\,T \\ P = T_{2n} & = k\,T_{2n-1} & = k^{2n}\,T \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Maintenant on a évidemment:

$$Q = T + T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{2n-1} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Ou, en vertu des relations (2):

$$Q = T\left(1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^{2n-1}\right) = T\frac{k^{2n} - 1}{k - 1} \quad \ldots \quad (4)$$

Comme la dernière des équations (2) donne:

$$T = \frac{P}{k^{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

il en résulte qu'en portant cette valeur dans la relation (4), on obtient:

$$Q = P\frac{k^{2n} - 1}{k^{2n}(k - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Ou:

$$\frac{Q}{2\,n\,P}=\frac{k^{2n}-1}{2\,n\,k^{2n}\,(k-1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Cette expression (7) détermine le rendement d'un moufle.

Ordinairement k est très peu différent de l'unité; dans ce cas, si on pose:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= 0{\cdot}26\,\frac{\delta^2}{D} + 2\,f\,\frac{d}{D} \\ k &= 1+\zeta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

La relation précédente devient:

$$\frac{Q}{2\,n\,P}=\frac{(1+\zeta)^{2n}-1}{2\,n\,(1+\zeta)^{2n}\,\zeta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Si on développe les puissances par la formule du binome et si on néglige les termes, qui contiennent les puissances de ζ, égales et supérieures à la seconde, on arrive à:

$$\frac{Q}{2\,n\,P}=\frac{1}{1+2\,n\,\zeta}=(1-2\,n\,\zeta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Cette expression approchée du coefficient de rendement d'un système de poulies mouflées montre clairement, comme la formule exacte, que le rendement diminue, lorsque le nombre des poulies augmente et que, par suite, il n'y a pas avantage, pour l'emploi d'une force, à prendre un nombre de poulies trop considérable. Ce nombre n est rarement supérieur à 3; lorsqu'il s'agit d'élever une charge très considérable, au lieu d'un seul moufle, composé d'un grand nombre de poulies, on emploie généralement plusieurs moufles, formés d'un nombre de poulies restreint.

Le tableau suivant, qui a été calculé au moyen de la formule exacte (7), indique les variations du rendement suivant les valeurs de k et n.

n	Valeurs du rendement pour		
	k = 1·05	k = 1·10	k = 1·15
2	0·88	0·79	0·75
3	0·85	0·73	0·63
4	0·81	0·66	0·56

Les équations, que nous avons établies précédemment, peuvent également servir à déterminer les dimensions d'un moufle, de manière à ce que le rendement ait une valeur déterminée, pour un nombre de poulies donné. n et $\frac{Q}{2\,n\,P}$ étant connus, k peut être déterminé approximativement, soit au moyen du tableau précédent, soit au moyen de la formule (7), et alors la valeur de D peut se calculer par la relation:

$$D = \frac{0{\cdot}26\,\delta^2 + 2\,f\,d}{k - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Supposons qu'il s'agisse, par exemple, d'établir un moufle de 3 poulies, qui donne un rendement de 0·85 et qui soit capable de soulever une charge de 5000 kilogrammes; on a alors:

$$P = \frac{5000}{0{\cdot}85 \times 2 \times 3} = 980 \text{ kilgr.}$$

Pour une traction de cette importance, la corde doit avoir un diamètre δ égal à 3 centimètres et demi. On a de plus:

$$d = 0{\cdot}12 \sqrt{\frac{5000}{2}} = 6 \text{ centimètres}, \quad f = 0{\cdot}1, \quad k = 1{\cdot}05.$$

La formule (11) donne alors:

$$D = \frac{0{\cdot}26 \times 3{\cdot}5^{2} + 2 \times 0{\cdot}1 \times 6}{0{\cdot}05} = 87 \text{ centimètres.}$$

Le diamètre des poulies serait, dans ce cas, très considérable; il ne serait que de 30 centimètres, si on se contentait d'un rendement de 0·63.

Pour les moufles, qui sont exposés à l'action de l'air et qui doivent élever de grandes charges, on remplace les cordes par des chaines métalliques. Dans ce cas, les poulies doivent présenter des creux pour recevoir les maillons des chaines.

Treuils métalliques.

Treuil métallique à simple pignon.

Fig. 11 et 12, pl. XLI. La charpente de ce treuil se compose de deux bâtis triangulaires a, reliés par trois traverses b en

fer forgé. Entre les deux bâtis se trouvent compris deux arbres c et g; sur le premier sont fixés une roue dentée d, un tambour à corde e et une poulie à frein *f*; le second porte un pignon h et deux manivelles k; à la poulie *f* correspond une lame de frein et un levier de commande. L'arbre g peut se déplacer, parallèlement à lui-même, de telle sorte que le pignon h engrène ou n'engrène pas avec la roue d.

Si l'on désigne par Q le poids suspendu à la corde, par P la somme des efforts exercés en même temps sur les manivelles, pour produire la rotation de l'axe g, enfin par r, R, w et k les rayons respectifs du pignon h, de la roue d, du tambour et d'une manivelle, on a, en négligeant les résistances accessoires:

$$Q = P \frac{R}{r} \frac{k}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si nous supposons que le nombre total des ouvriers, pour la manœuvre du treuil, soit égal à quatre, comme les deux manivelles sont calées à angle droit, il ne peut y avoir que deux de ces ouvriers agissant en même temps, et nous pouvons poser:

$$P = 2 \times 16 = 32, \quad \frac{R}{r} = 5, \quad \frac{k}{w} = \frac{36}{9} = 4$$

ce qui donne:

$$Q = 32 \times 5 \times 4 = 640 \text{ kilg.}$$

Les régles, que nous avons indiquées précédemment, nous permettent de calculer les dimensions des principaux organes de ce treuil, pour une charge de 640 kilogrammes.

Nous trouverons ainsi:

Diamètre de la corde pour une charge de 640 kilog.	$2^c,9$
Moment de torsion de l'arbre des manivelles 36×32	$= 1152$ kilgcentm.
Moment de torsion de l'arbre du tambour 5×1152	$= 5760$ "
Diamètre de l'arbre des manivelles	3 cent.
Diamètre de l'arbre du tambour	$5^c,2$
Grandeur relative de la roue dentée	6
Rayon de cette roue $6 \times 5{\cdot}2$	$31^c,2$
Rayon du pignon $\frac{31{\cdot}2}{5}$	$6^c,24$

Largeur des dents pour d et h

$\left(\frac{\beta}{\alpha} = 5, \text{ Fonte sur fonte}\right)$ . . . . $= 1{\cdot}212 \times 5{\cdot}2 = 63$

Nombre des dents { de d . . . . $= 70$
de h . . . . $= 14$

Le pression, que supporte chacun des tourillons de l'arbre du tambour, atteint son maximum, lorsque la corde est entièrement enroulée ou, au contraire, complètement déroulée; dans les deux cas, elle s'éléve approximativement à 640 kilogrammes (abstraction faite du poids des pièces d, e, f); on en conclut que le diamètre du tourillon doit être de 3 cent.

Il nous reste maintenant à déterminer les organes du frein. Au point de vue de l'effort à développer pour ce frein, le sens suivant lequel se fait l'enroulement de la corde n'est pas indifférent. La disposition de la fig. 13, pl. XLI, est préférable à celle de la fig. 14, puisque, dans le premier cas, la tension produite par le levier du frein est plus faible que dans le second. En nous reportant à la disposition de la fig. 13, désignons par T et t les tensions, qui doivent exister aux extrémités de la lame, quand la charge est maintenue suspendue par le frottement du frein; désignons, de plus, par ϱ et w les rayons de la poulie de ce frein et du tambour. par L et l les longueurs des deux bras du levier, par p la pression, exercée à l'extrémité de la grande branche L, par σ la longueur de l'arc de poulie, embrassé par la lame, et enfin par f le coefficient du frottement de cette lame sur la poulie; pour déterminer les plus petites valeurs de T et t, on a:

$$\left.\begin{aligned} T\varrho &= t\varrho + Q w \\ T &= t\, l^{f\frac{\sigma}{\varrho}} \\ t &= p\,\frac{L}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

On en conclut:

$$
\left.
\begin{aligned}
t &= Q\,\frac{w}{\varrho}\,\frac{1}{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}}-1}\\
T &= Q\,\frac{w}{\varrho}\,\frac{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}}}{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}}-1}\\
P\,\frac{L}{l} &= Q\,\frac{w}{\varrho}\,\frac{1}{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}}-1}
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)
$$

Pour le treuil à calculer, nous avons:

$$Q = 640, \quad w = 9,$$

si nous supposons de plus:

$$f = 0{\cdot}2,\ \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{\frac{2}{3}\,2\,\varrho\,\pi}{\varrho} = 4{\cdot}188,\ f\,\frac{\sigma}{\varrho} = 0{\cdot}8376$$

$$e^{f\frac{\sigma}{\varrho}} = 2{\cdot}718^{0{\cdot}8376} = 2{\cdot}307,\ \varrho = 24,\ \frac{L}{l} = 5$$

nous trouverons définitivement:

$$t = 640\,\frac{9}{24}\,\frac{1}{2{\cdot}307-1} = 183,\ T = 183 \times 2{\cdot}307 = 422,$$

$$p = \frac{1}{5}\,183 = 36 \text{ kilg.}$$

La valeur que nous avons prise, pour le coefficient de frottement, peut paraitre assez forte et cependant elle est très admissible, si on veut bien remarquer que les treuils de cette espèce ne sont généralement pas tenus avec un très grand soin, qu'ils sont exposés à la poussière et que, de plus, on évite, autant que possible, que la gorge de la poulie du frein ne devienne trop lisse.

t, T et p étant ainsi déterminés, les règles, que nous avons établies, nous permettent de calculer les dimensions des différents organes et nous donnent les résultats suivants:

Diamètre du tourillon, pour résister à la tension T, $2^c{,}5$

Diamètre du tourillon, pour la tension t, . . $1^c{,}7$

Section de la bande du frein $\frac{422}{\frac{1}{20}\,4350}$ . . . 2 cent. carrés.

Epaisseur de la bande . . . . $0^c{,}3$
Largeur de la même bande . . . . 7 centim.

La détermination des organes du levier de commande s'effectue d'une manière analogue et on trouve:

Diamètre d'un tourillon, pour la pression $p = 36$ kilg., $0^c{,}72$
Diamètre du tourillon de l'articulation $2{\cdot}3 \times 0{\cdot}72$. $= 1{\cdot}66$
Section d'un bras au point d'articulation:

$\left(\frac{p}{\delta_p}\right) = 90$, $\left(\frac{h}{b}\right) = 2$ . . . $h = 5{\cdot}2 \times 0{\cdot}72$ . . . . $= 3^c{,}7$
$b = \frac{1}{2}\,h$ . . . . $= 1^c{,}9$

On doit encore remarquer que la longueur du tambour se détermine par la longueur de la corde à enrouler. Au point de vue de l'action des ouvriers, la hauteur la plus avantageuse de l'arbre des manivelles, au-dessus du sol, serait celle qui correspondrait à peu près à la hauteur des épaules de ces ouvriers; mais le treuil qu'on obtiendrait, en satisfaisant à cette condition, serait trop élevé.

Les différentes dimensions de détails et spécialement celles qui se rapportent aux bâtis ne peuvent guère se déterminer qu'au sentiment, mais cette détermination ne présente aucune difficulté, lorsqu'on a reporté, sur un tracé, les dimensions des principaux organes fournies par le calcul.

Treuil métallique à double pignon.

Fig. 15 et 16, pl. XLI. Ce treuil se compose de trois arbres. L'arbre a porte le tambour, une grande roue dentée b et une poulie de frein c; sur l'arbre a_1 se trouvent calés un pignon d, engrènant avec b et une seconde roue e; le troisième arbre a_2 porte deux manivelles et un pignon f, qui commande la roue e. Si on désigne par Q la charge à élever, P l'effort exercé perpendiculairement sur les manivelles, k et w les rayons d'une manivelle et du tambour, R, r, R_1, r_1 les rayons des roues dentées b, d, e, f, on arrive, en négligeant les résistances accessoires, à la relation:

$$Q = P\,\frac{R}{r}\,\frac{R_1}{r_1}\,\frac{k}{w} \quad \text{. . . . . (1)}$$

Si nous prenons de nouveau:

$$P = 2 \times 16 = 32 \text{ kilg.}, \quad \frac{R}{r} = 6, \quad \frac{R_1}{r_1} = 5, \quad \frac{k}{w} = \frac{39}{12}$$

l'équation précédente donne:

$$Q = 32 \times 6 \times 5 \times \frac{39}{12} = 3120 \text{ kilg.}$$

Maintenant on a:

Moment de torsion de l'arbre a_2, 39×32 . . . $= 1248$ kilg.-centim.
» » » » » a_1, 1248×5 . . . $= 6240$ »
» » » » » a, 6240×6 . . . $= 37440$ »

Diamètres des arbres { a_2 . . . . $= 3$ centim.
{ a_1 . . . . $= 5^c,4$
{ a . . . . $= 9^c,7$

Grandeur relative de la roue b . . . . $= 6$
Rayon de cette roue $6 \times 9{\cdot}7$ . . . . $= 58^c,2$
Largeur des dents $\left(\frac{\beta}{\alpha} = 5\right)$ $1{\cdot}212 \times 9{\cdot}7$ . . . $= 11^c,7$
Nombre de dents de la roue b . . . . $= 72$
Rayon du pignon d, $\frac{58{\cdot}2}{6}$ . . . . $= 9^c,7$
Nombre de dents $\frac{72}{6}$ . . . . $= 12$
Grandeur relative de la roue e . . . . $= 5$
Rayon de e, $5 \times 5{\cdot}4$ . . . . $= 27^c,0$
Nombre de dents . . . . $= 55$
Largeur des dents $1{\cdot}328 \times 5{\cdot}4$ . . . . $= 7^c,2$
Rayon du pignon f, $\frac{27}{5}$ . . . . $= 5^c,4$
Nombre des dents $\frac{55}{5}$ . . . . $= 11$

Pour la détermination des dimensions des organes du frein, nous pouvons employer les relations trouvées précédemment, page 426:

$$\left.\begin{aligned} t &= Q\,\frac{w}{\rho}\,\frac{1}{e^{f\frac{\alpha}{\rho}} - 1} \\ T &= Q\,\frac{w}{\rho}\,\frac{e^{f\frac{\alpha}{\rho}}}{e^{f\frac{\alpha}{\rho}} - 1} \\ p &= \frac{1}{L}\,t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Toutefois, dans le cas actuel, la détermination de dimensions pratiques admissibles présente plus de difficultés, puisque l'action du frein doit pouvoir faire équilibre à un poids très considérable et que nous avons supposé égal à 3120 kilogrammes. Admettons qu'on prenne:

$$Q = 3120, \quad \frac{w}{\varrho} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}, \quad f = 0{\cdot}2, \quad \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{\frac{3}{4}\,2\,\varrho\,\pi}{\varrho} = 4{\cdot}7$$

$$f\,\frac{\sigma}{\varrho} = 0{\cdot}2 \times 4{\cdot}7 = 0{\cdot}94 \text{ ou, approximativement, } f\,\frac{\sigma}{\varrho} = 1, \quad \frac{l}{L} = \frac{1}{10}$$

Ces valeurs, portées dans les formules, donnent:

$$t = 3120\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2{\cdot}718 - 1} = 454, \quad T = 454 \times 2{\cdot}718 = 1234 \text{ kilg.}$$

$$p = \frac{454}{10} = 45 \text{ kilg.}$$

Ces valeurs montrent que, dans les conditions supposées, l'établissement du frein est encore possible.

On a, de plus, pour les dimensions des divers organes:

Diamètre du tourillon, pour la tension T . . . . . . $4^c,2$

" " " " " " t . . . . . . $2^c,6$

" " " " la pression p . . . . . . $0^c,8$

Diamètre de l'articulation du levier coudé $3{\cdot}2 \times 0{\cdot}8$. $2^c,56$

Section du levier, mesurée à l'articulation:

$\left(\frac{p}{\delta_p} = \frac{100}{0{\cdot}8} = 125, \ \frac{h}{b} = 2\right)$ Hauteur $5{\cdot}5 \times 0{\cdot}8$ . . . . . $= 4^c,4$

Epaisseur . . . . $= 2^c,2$

Section de la lame du frein $\dfrac{1234}{\frac{1}{20}\,4350}$ . . . . $= 5^{cq},6$

Epaisseur de la lame . . . . $= 0^c.5$

Largeur . . . . $= 11^c,2$

Le genre de treuil, que nous venons d'examiner, peut être employé à soulever aussi bien de faibles charges que des poids considérables, à la condition, toutefois, de le disposer de manière à ce qu'on puisse agir, à volonté, par l'intermédiaire d'un seul ou de deux pignons. Dans ce but, l'arbre a_2 doit être muni d'un second pignon g (non représenté sur la figure), de même diamètre que d, et fixé sur l'arbre a_2 en un point tel qu'il n'engrène pas avec la roue b, lorsque le pignon f engrène avec la roue e. Si on rend l'arbre a_2 mobile, on peut arriver: 1°. à faire engrèner le pignon g avec la roue b, f et e n'engrènant plus, et agir ainsi

par l'intermédiaire d'un seul pignon; 2°, à faire engrèner, au contraire, le pignon *f* et la roue e, et agir alors par l'intermédiaire de deux pignons, lorsque la charge à soulever est considérable. Enfin nous devons encore faire remarquer que, dans le cas de grandes charges, comme celle de 3120 kilogrammes, que nous avons admise pour nos calculs, on ne peut songer à l'emploi de cordes et qu'il est indispensable d'avoir recours aux chaines métalliques. D'après les formules que nous avons données, le diamètre d'une chaine en fer serait de 1^c,6. Afin d'éviter que les chainons, en s'enroulant sur le tambour, ne viennent à se superposer, il convient de pratiquer, sur ce tambour, une rainure héliçoïdale, destinée à recevoir la chaine.

Les treuils à deux pignons ne sont que rarement employés; ils ont l'inconvénient d'être lourds, bien qu'ils ne puissent soulever, en définitive, que des charges assez peu importantes. On n'emploie guère davantage les treuils à trois pignons. Lorsque la charge est trop considérable pour qu'on puisse l'élever avec un treuil à un ou à deux pignons, on a recours à plusieurs treuils ou à la combinaison de treuils et de moufles.

Treuils à friction.

Lorsque la longueur de la chaine ou de la corde, qu'il s'agit d'enrouler sur un tambour, est très considérable (ce qui est en particulier le cas, lorsqu'on a recours à des moufles), il est nécessaire de donner à ce tambour une grande longueur. En pareil cas, on peut remplacer les treuils, précédemment décrits, par ce qu'on appelle les treuils à friction.

Les fig. 17 et 18, pl. XLI, représentent un treuil de cette espèce. Cet appareil porte 3 arbres a_1, a_2, a_3. Sur l'arbre a_1 se trouvent fixés un tambour à corde b_1 et une roue dentée c_1; de même, sur l'arbre a_3, un second tambour b_3 et une seconde roue c_3; le troisième arbre, terminé par deux manivelles, porte en même temps un pignon c_2, qui engrène à la fois avec les deux roues c_1 et c_3.

Lorsqu'on veut faire usage d'un treuil, pour surmonter une résistance, dirigée suivant T et dont le point d'application doit parcourir un chemin considérable, on commence par faire faire à la corde plusieurs tours sur les deux tambours, puis l'extrémité t de cette corde est confiée à un ouvrier A, qui a pour mission de la tenir tendue, tandis que d'autres ouvriers B agissent sur les

manivelles, pour produire l'enroulement du cordon T et, par suite, le déroulement du cordon t. Les points, où commencent à se produire l'enroulement et le déroulement des deux brins T et t, restent toujours les mêmes, et si l'ouvrier A maintient la corde suffisamment tendue, en laissant trainer sur le sol la partie déroulée, il se produit sur le contour du tambour, comme conséquence de la tension, un frottement tel que la corde ne peut pas glisser sur le tambour et se trouve entrainée avec lui. Un pareil treuil à friction constitue en quelque sorte un moufle à rotation.

Si l'on désigne par T et t les tensions des deux brins, w le rayon du tambour, k celui des manivelles, sur lesquelles agissent les ouvriers B, P l'effort que ces ouvriers exercent sur ces manivelles, R le rayon des roues c_1 et c_3, r celui du pignon c_2, et si suppose qu'on néglige d'abord les résistances secondaires (raideur de la corde et frottement des tourillons des arbres), on arrive à la relation:

$$T = t + P \frac{R}{r} \frac{k}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

D'ailleurs, pour que la corde ne glisse pas sur les tambours, T et t doivent satisfaire à l'équation:

$$T = t\, e^{f \frac{\sigma}{w}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Où f représente le coefficient applicable au frottement de la corde sur les tambours et σ la longueur totale des arcs embrassés par la corde, sur ces deux tambours.

De ces deux relations on tire:

$$\left.\begin{aligned} P &= T \frac{r}{R} \frac{w}{k} \frac{e^{f \frac{\sigma}{w}} - 1}{e^{f \frac{\sigma}{w}}} \\ t &= T \frac{1}{e^{f \frac{\sigma}{w}}} \\ T &= P \frac{R}{r} \frac{k}{w} \frac{e^{f \frac{\sigma}{w}}}{e^{f \frac{\sigma}{w}} - 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Comme application, si on suppose:

$$P = 2 \times 16, \frac{R}{r} = 5, \frac{k}{w} = \frac{39}{13} = 3, \ f = 0{\cdot}28$$

$$\frac{\sigma}{w} = \frac{3 \times 2 \, w \, \pi}{w} = 18{\cdot}8 \text{ (trois enroulements complets)}$$

les formules précédentes donnent:

$$e^{f \frac{\sigma}{w}} = 2{\cdot}718^{5{\cdot}264} = 193$$

$$T = 32 \times 5 \times 3 \, \frac{193}{193 - 1} = 480 \text{ kilg.}$$

$$t = \frac{480}{193} = 2 \text{ kilg. } 5.$$

D'où il résulte qu'il suffit de donner une très faible tension au brin qui se déroule.

Le mode de calcul précédent, où on néglige les résistances secondaires, est très suffisant pour les treuils à friction de petites dimensions, mais lorsqu'il s'agit d'installer des appareils de cette espèce d'une certaine importance, il convient d'apporter la plus grande rigueur possible dans les calculs et c'est ce que nous allons faire, en tenant compte des résistances secondaires.

Supposons que les différentes tensions de la corde aient précisément les valeurs, strictement nécessaires, pour qu'il ne se produise pas un glissement de cette corde sur les poulies.

Soient:

$t, t_1, t_2, \ldots, t_{2n} = T$ ces tensions pour les différents brins de la corde,

n le nombre, qui indique combien de fois la corde est enroulée sur chacun des deux tambours,

$\lambda = e^{f\pi}$, où $e = 2{\cdot}718$ représente la base des logarithmes naturels,

π le rapport de la circonférence au diamètre,

f le coefficient de frottement de la corde sur les tambours,

f_1 le coefficient de frottement des tourillons des arbres,

δ le diamètre de la corde en centimètres,

d le diamètre des tourillons des tambours,

$D = 2\,w$ le diamètre des tambours.

Les plus petites valeurs que puissent avoir les différentes tensions, pour qu'il n'y ait pas de glissement, sur les tambours, doivent satisfaire aux relations:

$$t_1 = \lambda\, t, \ t_2 = \lambda\, t_1 = \lambda^2\, t, \ t_3 = \lambda\, t_2 = \lambda^3\, t \ldots . \ t_{2n} = T = \lambda^{2n}\, t \quad . \quad . \quad (1)$$

L'effort P, exercé sur les manivelles, doit surmonter, non seulement la différence des tensions $t_{2n} - t = T - t$, mais encore le frottement des tourillons et la résistance due à la raideur de la corde. On doit donc avoir:

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = t_{2n} - t + f_1 \frac{d}{D} \left[(t + t_1) + (t_1 + t_2) + (t_2 + t_3) + \dots + \left(t_{2n-1} + t_{2n} \right) \right]$$
$$+ 0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} (t + t_1 + t_2 + \dots + t_{2n-1})$$

Ou:

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = t_{2n} - t + 2 (t + t_1 + t_2 + \dots + t_{2n-1}) f_1 \frac{d}{D} + (t_{2n} - t) f_1 \frac{d}{D}$$
$$+ 0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} (t + t_1 + \dots + t_{2n-1})$$

Ou encore:

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = (t_{2n} - t) \left(1 + f_1 \frac{d}{D} \right) + \left(0{\cdot}26 \frac{\delta_2}{D} + 2 f_1 \frac{d}{D} \right) (1 + t_1 + \dots + t_{2n-1})$$

Et, comme en vertu de l'équation (1), on a:

$$t + t_1 + t_2 + \dots + t_{2n-1} = t (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{2n-1}) = \frac{\lambda^{2n} - 1}{\lambda - 1} t$$

Il en résulte qu'on peut écrire:

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = (t_{2n} - t) \left(1 + f_1 \frac{d}{D} \right) + \left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f_1 \frac{d}{D} \right) \frac{\lambda^{2n} - 1}{\lambda - 1} t$$

Ou, puisque $t_{2n} = T = t \lambda^{2n}$:

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = T \frac{\lambda^{2n} - 1}{\lambda^{2n}} \left[1 + f_1 \frac{d}{D} + \left(0{\cdot}26 \frac{\delta_2}{D} + 2 f_1 \frac{d}{D} \right) \frac{1}{\lambda - 1} \right] \quad (2)$$

Cette relation s'accorde avec celle que nous avons établie précédemment, à la condition de faire disparaitre tous les termes qui représentent les frottements des tourillons et la raideur de la corde. L'influence de n sur la valeur de P est donnée par le rapport $\frac{\lambda^{2n} - 1}{\lambda^{2n}}$; ce quotient est toujours plus petit que l'unité, mais il s'en rapproche très rapidement à mesure qu'on fait croitre n et qu'on le prend égal à 2, 3, 4 ... On peut en conclure que l'effort à exercer sur les manivelles, pour surmonter une certaine résistance T, est un peu plus grand pour un nombre considérable

d'enroulements que pour un nombre plus petit. Ainsi donc la multiplication des tours de la corde sur les tambours a pour résultat d'augmenter un peu l'effort à exercer pour faire équilibre à la résistance, mais, par contre, elle diminue la tension t, c'est-à-dire qu'elle facilite le travail de l'ouvrier, chargé de produire cette tension.

Soient:

$$T = 1248 \text{ kilg.}, \; d = 6, \; \delta = 4, \; D = 36$$

$$f_1 = 0{\cdot}1, \; f = 0{\cdot}28, \; \frac{R}{r} = 5, \; \frac{k}{w} = \frac{36}{18} = 2, \; n = 3,$$

on a:

$$\lambda = 2{\cdot}718^{0{\cdot}28 \times 3{\cdot}14} = 2{\cdot}408$$

et

$$1 + f_1 \frac{d}{D} + \left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f_1 \frac{d}{D}\right) \frac{1}{\lambda - 1} = 1{\cdot}122$$

Par suite:

$$P = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times 1248 \times \frac{2{\cdot}408^6 - 1}{2{\cdot}408^6} \, 1{\cdot}122 = 140 \text{ kilg.}$$

Dans ce cas l'effort calculé est plus grand (dans le rapport de 1·122 : 1) que celui qu'on aurait obtenu, en ne tenant pas compte des résistances secondaires.

Grues.

Une grue est un appareil, mobile autour d'un axe vertical, qui se compose d'un ou de plusieurs treuils, et au moyen duquel on peut amener une charge d'un point à un autre, à la condition que les deux points se trouvent compris dans l'intérieur d'un cylindre d'un rayon déterminé. Suivant les usages qu'elles doivent remplir, les grues peuvent être divisées en trois classes distinctes:

1°, Les grues de magasins, c'est-à-dire les grues établies dans des locaux couverts;

2°, Les grues de quais, pour le service des vaisseaux;

3°, Les grues mobiles, sur voie ferrée.

Nous allons donner la description d'un certain nombre de ces appareils et indiquer leur mode de construction.

Grue simple de magasin.

Fig. 1, pl. XLII. La partie mobile de l'appareil se compose de trois pièces a, b, c. La pièce verticale a est munie de tourillons à ses deux extrémités; le tourillon supérieur g est maintenu dans un coussinet, fixé dans le plancher du magasin; le tourillon inférieur h tourne dans une crapaudine, fixée sur le sol. d et e sont des poulies de renvoi, *f* un treuil, avec roues d'engrenages et manivelles. La corde, à l'extrémité de laquelle se trouve la charge à soulever, passe sur les poulies d et e, pour venir s'enrouler sur le tambour du treuil *f*. Après avoir fixé la charge à la corde, on la fait monter d'une certaine hauteur, puis on fait tourner le bâti mobile d'un angle convenable, pour amener cette charge dans la position qu'elle doit occuper; il est bien entendu d'ailleurs que cette position doit se trouver sur la circonférence du cercle décrit par le centre de gravité de la charge, dans le mouvement de rotation de la grue.

Grue de magasin (autre disposition).

Fig. 2, pl. XLII. Cet appareil diffère du précédent, en ce que l'une des poulies de renvoi est supprimée et que l'autre d se trouve à l'extrémité de la contrefiche b, laquelle est maintenue dans sa position, par rapport à la colonne, au moyen d'un tirant c. La corde, ou la chaine, après son passage sur la poulie d, suit une direction parallèle à la contrefiche b, pour venir s'enrouler sur le tambour du treuil. Ici, comme dans l'appareil précédent, le treuil peut être à un ou à deux pignons; mais il doit toujours être muni d'un frein, susceptible de maintenir la charge suspendue ou de la laisser descendre avec une vitesse modérée.

Grue sans contrefiche.

Fig. 3, pl. XLII. Dans cette disposition, le remplacement de la contrefiche par plusieurs tirants a pour résultat de laisser libre l'espace compris entre la charge et l'arbre de la grue.

Grue sans arbre.

Fig. 4, pl. XLII. La contrefiche porte, à sa partie inférieure, un tourillon vertical mobile, qui repose dans une crapaudine; à la

partie supérieure elle est reliée, par un tirant, à un second tourillon, mobile dans un collet fixé dans le plancher du magasin. Le treuil est établi directement sur la contrefiche et tourne avec elle.

Grue de fonderie.

Fig. 5, pl. XLII. Dans cet appareil, la partie de la charpente extérieure à l'arbre est double, c'est-à-dire qu'elle comprend deux pièces horizontales, formant une double voie et qu'entre les deux contrefiches, sur lesquelles reposent ces pièces, il existe un espace libre, dont la largeur est très sensiblement égale à l'épaisseur de l'arbre à pivots. A leur extrémité, la plus éloignée de cet arbre, les poutres horizontales sont entretoisées et reliées par des boulons.

Comme les charges, qu'une grue de ce genre est destinée à soulever, sont, en général, très considérables, le treuil est à deux pignons; il est disposé, toutefois, de manière à ce qu'on puisse marcher avec un seul et il est muni d'un frein. Dans une grue de fonderie, il est indispensable de pouvoir atteindre tous les points compris dans le cercle, dont le rayon est égal à la longueur des poutres; cette condition doit être réalisée de telle manière qu'on puisse prendre un chassis en un point quelconque, situé à l'intérieur de ce cercle, le soulever verticalement d'un mouvement très doux, l'amener en un autre point quelconque du même cercle et l'y déposer, en le laissant descendre verticalement, avec une vitesse très modérée. Pour arriver à ce résultat, il est nécessaire de pouvoir donner à la charge suspendue un mouvement dans les deux sens, entre l'axe de la grue et l'extrémité des poutres; on emploie ordinairement, à cet effet, de petits chariots à quatre roues, auxquels le mouvement est transmis par l'intermédiaire d'un treuil spécial ou d'un système de poulies. Le plus souvent la charge est suspendue indirectement au chariot, au moyen d'un moufle; il convient d'ailleurs de recourir à une disposition de chariot telle qu'il s'arrête de lui-même, lorsqu'on veut élever ou abaisser la charge au moyen du treuil et qu'au contraire la charge reste exactement à la même hauteur, lorsque le chariot roule, dans un sens ou dans l'autre, sur les poutres horizontales.

La fig. 6, pl. XLII, représente un chariot avec moufle, satisfaisant à ces diverses conditions. Le chariot a, qui présente une disposition analogue à celle d'un wagon de chemin de fer, est muni de deux pièces à trois branches b, qui portent trois axes.

Deux poulies c c sont folles sur l'axe placé au milieu; chacun des deux autres axes porte une poulie guide d, e; un équipage de trois poulies est figuré en *f*. Une corde, fixée à l'extérieur d'une des poutres, passe sur la poulie d, s'enroule successivement sur les poulies *f* et c du moufle, puis vient repasser sur la poulie e, gagne l'arbre de la grue et, au moyen d'une nouvelle poulie de renvoi, vient s'enrouler sur le tambour du treuil. Les poulies guides d et e sont indispensables, pour maintenir rigoureusement en ligne droite les brins g et h et empêcher, par suite, les efforts latéraux, qui pourraient avoir pour résultat de produire une rotation du chariot autour d'un axe vertical. En i et k sont fixées les extrémités d'une seconde corde qui, après son passage sur un certain nombre de poulies de renvoi, vient s'enrouler sur le treuil spécial, destiné au mouvement du chariot.

Les dimensions des pièces de la charpente de la grue se déterminent d'après la charge à soulever, celles du treuil d'après la tension du brin h et enfin celles du treuil de manœuvre du chariot, d'après les résistances à vaincre pour le mettre en mouvement.

Grue de quai.

Fig. 7, pl. XLII. Les grues de ce genre se distinguent de celles que nous avons précédemment décrites par une disposition spéciale, qui permet d'obtenir la verticalité de l'axe de rotation, sans recourir à un pivot supérieur. La partie inférieure de cet axe est établie dans une cavité verticale, ménagée dans un massif en maçonnerie; elle est munie d'un pivot tournant dans une crapaudine, fixée sur le fond même de cette cavité; à la partie supérieure du massif, l'arbre de la grue s'appuie, par une partie tournée, sur une série de galets, dont les axes sont placés verticalement, dans une caisse métallique. Afin d'éviter les tendances aux déplacements horizontaux, il convient de relier fortement les assises supérieures du massif aux assises inférieures.

Grue à axe fixe.

Fig. 8, pl. XLII. Dans cette disposition, le bâti de la grue tout entier peut tourner autour d'une colonne verticale fixe a, terminée, à la partie supérieure, par un pivot et fixée, à la partie inférieure, sur une plaque en fonte b, fortement reliée à un massif

en maçonnerie. Le bâti mobile comprend essentiellement deux plaques c, reliées, en haut et en bas, par des pièces transversales; celle qui relie les parties supérieures porte une espèce de crapaudine renversée, tandis que l'autre, à la partie inférieure, forme une caisse munie de galets. Le bâti tout entier repose, par sa crapaudine, sur le pivot de la colonne et s'appuie, au moyen des galets, contre cette même colonne, qui est tournée à la partie inférieure. De la caisse inférieure part une pièce rigide d, qui porte une poulie à son extrémité et vient se relier au bâti par un tirant en fer e.

Grue en tôle.

Fig. 9, pl. XLII. La grue, représentée par cette figure, se distingue essentiellement des précédentes, en ce que le bâti, mobile autour d'un axe fixe, est entièrement en tôle. Il a la forme d'une pièce courbe, à section rectangulaire variable; en a se trouve une traverse, munie d'une crapaudine et, à la partie inférieure, en b, une boite à galets.

Grue sans axe de rotation.

Fig. 10, pl. XLII. Dans cette disposition, le bâti est une espèce de chariot, mobile autour d'un pivot vertical et muni de deux roues coniques b; les plaques c, qui forment ce chariot, sont réunies par un certain nombre d'entretoises; celle qui est figurée en d ne sert qu'à relier les plaques; celle qui est en e porte, en son milieu, un coussinet pour le pivot; les pièces transversales f et f_1 reçoivent les axes des roues coniques; ces axes sont horizontaux et dirigés vers le pivot de rotation. La grue tourne sur une plaque en fonte, munie, en son milieu, d'un coussinet pour le passage du pivot et, sur son pourtour, d'une saillie conique. La flèche g de la grue est soutenue par deux tirants h. Pratiquement cette disposition de grue est peu avantageuse, car elle rend une grande surface de terrain inutilisable.

Grue mobile sur rails.

Fig. 1, pl. XLIII. Cette grue diffère de celle que représente la fig. 8, pl. XLII, en ce que la plaque de fondation, au lieu d'être fixée sur un massif en maçonnerie, forme le tablier d'un

chariot à quatre roues, mobile sur des rails en fer; elle porte un contrepoids a, destiné à empêcher le renversement de l'appareil, sous l'action de fortes charges.

Théorie des grues.

Fig. 2, pl. XLIII. Nous avons examiné précédemment tout ce qui se rapporte au calcul des treuils et des moufles et nous n'avons rien à ajouter pour les appareils de ce genre, qui entrent dans la composition des grues. Il n'en est pas de même de la construction des bâtis, pour laquelle il est indispensable de connaitre les efforts auxquels sont soumises les différentes pièces, et c'est là une question importante qu'il nous reste à traiter. Supposons une grue, dont l'axe porte un tourillon, en A, un pivot, en D, et portons, dans les directions indiquées par les flèches, les forces P_1, P_2, P_3 qui représentent respectivement, la première, l'action du coussinet sur le tourillon supérieur, la seconde, l'action latérale de la crapaudine sur le tourillon inférieur de l'arbre et enfin la troisième, la réaction de la crapaudine sur le pivot. L'ensemble de la grue peut, dès lors, être assimilé à un système de corps sans liaisons extérieures, soumis à des forces qui se font équilibre.

Soient F le centre de gravité de la grue, y compris le treuil, P_4 le poids de cette grue, G le centre de gravité du bras C E et P_5 son poids, P_6 la tension du tirant B E, P_7 la compression exercée sur le bras C E. Puisque toutes les forces sont en équilibre, elles ne peuvent produire aucun mouvement général ou particulier.

Pour qu'il ne se produise aucun mouvement de rotation autour d'un axe, passant par le point D et perpendiculaire au plan de la figure, on doit avoir la relation:

$$P_1 h = P_4 a_1 + Q a$$

D'où on déduit:

$$P_1 = Q \frac{a}{h} + P_4 \frac{a_1}{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

De même, pour qu'il n'y ait aucun mouvement de rotation autour d'un axe passant par le point A, on doit avoir:

$$P_2 h = Q a + P_4 a_1$$

et, par suite:

$$P_2 = P_1 = Q \frac{a}{h} + P_4 \frac{a_1}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les actions exercées sur les deux tourillons de l'arbre de la grue sont donc les mêmes et, par conséquent, il convient de prendre le même diamètre pour ces tourillons. Ces pressions ont, comme on le voit, une valeur d'autant plus grande que la portée a est plus forte et la hauteur de la grue plus faible. Il y a donc lieu, pour le constructeur, de mettre la hauteur en rapport avec la portée, non seulement pour pouvoir diminuer le diamètre des tourillons, mais encore pour ne rencontrer aucune difficulté dans la fixation du palier supérieur et de la crapaudine.

Ordinairement on prend:

$$\frac{a}{h} = 1, \quad P_4 = Q, \quad \frac{a_1}{h} = \frac{1}{4}$$

On a alors:

$$P_2 = P_1 = \frac{5}{4} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Les moments des forces, qui tendent à rompre l'arbre de la grue, en B et C, ont respectivement pour valeur, $P_1 h_1$ et $P_2 h_2$. Par conséquent, pour ne pas être obligé de donner à cet arbre des dimensions trop considérables, il convient de faire aussi faibles que possible les distances des points B et C aux points A et D.

Les moments précédents deviennent nuls, quand on a $h_1 = h_2 = o$; dans ce cas, l'arbre n'est plus exposé à la flexion et il peut même être supprimé, comme, par exemple, dans le dispositif de la fig. 4, pl. XLII. Quand les distances h_1 et h_2 ont des valeurs déterminées, il est avantageux, au point de vue de la résistance de l'arbre de la grue, de donner à la hauteur h une assez grande valeur, par rapport à la volée, puisque, de cette manière, on diminue les pressions P_1 et P_2 et, par suite, les moments $P_1 h_1$ et $P_2 h_2$.

Si on suppose coupés le tirant B E et la corde E C, en appliquant aux points de section les forces P_6 et Q, la pièce E C devient un levier, mobile autour du point C et soumis aux forces Q, P_6, P_5, qui se font équilibre; on a, par conséquent, la relation:

$$P_5 a_2 + Q a = P_6 (h - h_1 - h_2) + Q a_3.$$

où a_3 représente la distance de l'axe de la corde à l'axe du bras C E. On en déduit:

$$P_6 = Q \frac{a - a_3}{b - b_1 - b_2} + P_5 \frac{a_3}{b - b_1 - b_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cette expression montre que la tension du tirant est d'autant plus faible que la hauteur de l'arbre est plus grande par rapport à la volée.

En désignant par α et β les angles que forment les directions des forces Q et P_6 avec celle de la pièce E C, on a:

$$P_7 = Q + P_6 \cos \beta + Q \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

expression qui sert à déterminer la section du bras.

On arrive à des résultats tout-à-fait semblables pour tous les autres dispositifs de grues. Pour la grue, dont l'arbre est en partie logé dans un puits en maçonnerie (fig. 7, pl. XLII), on trouve qu'il est avantageux de donner à ce puits une assez grande profondeur, car on diminue, de cette manière, la pression de l'arbre contre les galets; on arrive ainsi, non seulement à réduire les diamètres des tourillons de ces galets, mais encore à supprimer, dans une certaine mesure, les difficultés relatives à la fixation de la boite des galets sur les assises supérieures du massif et à la liaison de ces dernières avec les assises inférieures.

Pour les grues à arbre fixe (fig. 8 et 9, pl. XLII), il y avantage à exagérer la hauteur par rapport à la volée, car on peut ainsi réduire le diamètre du tourillon supérieur; quant à la section de l'arbre, à la partie inférieure, elle est indépendante de sa hauteur.

Matériaux de construction pour grues.

L'emploi du fer forgé et de la fonte est naturellement indiqué pour certains éléments des grues, tels que les treuils, les moufles, etc. Mais, pour la charpente proprement dite, on peut avoir recours au bois, à la fonte ou au fer forgé. Pour les grues de magasin, qui sont établies sous des toits et qui, par suite, ne sont pas exposées à l'action du soleil et de la pluie. on se borne généralement à une charpente en bois, qui a l'avantage de n'exiger qu'une assez faible dépense, tout en présentant des chances suffisantes de durée. Dans les grues sans point de

fixation à la partie supérieure, il est indispensable de recourir à l'emploi du fer ou de la fonte, car une charpente en bois, exposée à toutes les influences de température, arriverait trop rapidement, dans ce cas, à être hors d'usage. Parmi les grues en tôle, qui commencent à être en grande faveur, il convient de donner la préférence à celles qui sont formées de pièces droites avec tirants, parce qu'on n'a pas à redouter, dans ce cas, les effets de flexion. Il convient d'ajouter que les grues en tôle, mobiles autour d'une colonne verticale, ont l'avantage de laisser un espace libre qu'on peut utiliser pour différents usages.

Pour les grues sans point de fixation supérieur, qui sont exposées, non seulement au vent et à la pluie, mais encore à la mauvaise volonté et à la maladresse des ouvriers, il faut éviter avec le plus grand soin, dans leur construction, tout ce qui serait de nature à favoriser les détériorations. Ainsi, par exemple, on doit renoncer, pour les arbres, à l'emploi des paliers ordinaires avec chapeaux maintenus par des boulons et se borner à faire pénétrer leurs extrémités dans des trous pratiqués dans le bâti.

Les principes qu'on doit suivre, pour la construction des charpentes de grues, sont les suivants: 1°, On doit autant que possible adopter des dispositions telles que les pièces les plus importantes se trouvent exposées à des efforts de traction ou de compression, mais jamais à des efforts de flexion. Les dispositions, représentées par les fig. 2, 8 et 10, pl. XLII, sont celles qui satisfont le mieux à cette condition et elles doivent être adoptées, de préférence à la disposition représentée par la fig. 9. 2°, Les différentes pièces doivent être reliées entre elles de manière à ce que quelques-unes de ces pièces ne puissent pas arriver à prendre une courbure prononcée sous l'action d'une charge assez considérable pour produire une déformation. Cette condition se trouve complétement réalisée dans la disposition que représente la fig. 1, pl. XLIII.

Calcul complet d'une grue.

Proposons nous de calculer une grue de fonderie, avec charpente en bois, semblable à celle que représente la fig. 5, pl. XLII.

Comme données particulières, nous admettrons les suivantes:

1°, L'effort exercé à chaque instant sur les manivelles est celui de deux ouvriers, c'est-à-dire qu'on a $P = 2 \times 16 = 32$ kilg.

2°, Le treuil a deux pignons et on suppose $\frac{R}{r} = 6$, $\frac{R_1}{r_1} = 5$, $\frac{k}{w} = 3$,

3°, Le moufle a 5 poulies, 3 à la partie inférieure et 2 à la partie supérieure,

4°, Pour tout le mécanisme (treuil, moufle et poulies) le coefficient de rendement est 0·6.

Dans ces conditions, le poids qui peut être soulevé, grâce à un effort P = 32 kilg., exercé sur les manivelles, a pour expression:

$Q = 32 \times 6 \times 5 \times 3 \times 5 \times 0{\cdot}6$	= 8640 kilg.
La tension de la corde ou de la chaine, enroulée sur le tambour, est approximativement $32 \times 6 \times 5 \times 3$	= 2880 „
Une tension aussi considérable exige forcément l'emploi d'une chaine et le diamètre du fer, formant les anneaux, sera, d'après les tableaux indiqués précédemment	= 1·5 centm.
Moment de torsion de l'axe d'une manivelle 32×39	= 1248 kilgrem.
Moment de torsion de l'axe intermédiaire 1248×5	= 6240 „
Moment de torsion de l'axe de la chaine 6240×6	= 37440 „
Diamètre de chacun de ces trois axes, d'après les tableaux	= 3·1 centm. = 5·4 „ = 9·7 „
Rayon de la grande roue $6 \times 9{\cdot}7$	= 58·2 „
Rayon du pignon correspondant	= 9·7 „
Rayon de la petite roue $6 \times 5{\cdot}4$	= 32·4 „
Rayon du pignon correspondant $\frac{1}{5}$ 32·4	= 6·5 „
Largeur des dents de la grande roue $1{\cdot}212 \times 9{\cdot}7$	= 11·75 „
Largeur des dents de la petite roue $1{\cdot}212 \times 5{\cdot}4$	= 6·55 „
Nombre de dents de chacune de ces roues . .	= 72
Diamètre du tourillon de l'arbre du tambour de la chaine $= 0{\cdot}12 \sqrt{2880}$	= 6·4 centm.
Pression sur chacun des tourillons des 3 poulies guides (approximativement) $\frac{1}{2}\sqrt{2880^2 + 2880^2}$	= 2030 kilg.
Diamètre d'un de ces tourillons $0{\cdot}12 \sqrt{2030}$ . .	= 5·4 centm.
Diamètre d'une des poulies guides $5 \times 5{\cdot}4$ . .	= 27·0 „
Pression supportée par un tourillon de la chape inférieure $\frac{1}{2}$ 8640	= 4320 kilg.

Diamètre de chacun de ces tourillons $0\cdot12\sqrt{4320}$ = 7·8 centm.
Diamètre d'une poulie du moufle . . . . = 39 „
Pression sur un tourillon du chariot $\frac{8640}{4}$ . . . = 2160 kilg.
Diamètre d'un de ces tourillons . . . . = 5·5 centm.
Diamètre d'une roue du chariot . . . . = 27·5 „

Pour la construction de la charpente de la grue, admettons les données suivantes:

Hauteur de la grue (mesurée entre les tourillons) = 500 centm.
Longueur de la portée . . . . = 500 „
Poids de la grue (l'expérience indique que ce poids est approximativement égal à la charge à soulever) . . . . = 8640 kilg.
Distance du centre de gravité de l'appareil à l'axe de la colonne . . . . = 120 centm.
Distance au même axe de l'intersection des poutres horizontales et des contrefiches principales . = 200 „
Longueur de ces contrefiches . . . . = 500 „

En partant de ces données, on arrive aux résultats suivants:

Pression supportée par un tourillon de la colonne, quand la charge agit à l'extrémité des poutres, $8640 + 8640\,\frac{120}{500}$ . . . . = 10800 kilg.
Diamètre de ce tourillon $0\cdot12\sqrt{10800}$ . . . . = 12 centm.
Pour assurer complétemens la liaison de chacun des tourillons avec la colonne, il convient de donner à cette dernière une section carrée, dont le côté soit environ cinq fois plus considérable que le diamètre précédent, c'est-à-dire égal à = 60 „
Pour les poutres horizontales, qui sont soutenues par les contrefiches, il convient de prendre:
la hauteur . . . . = 40 „
l'épaisseur $\frac{1}{2}\,40$ . . . . = 20 „
La pression qu'ont à supporter les contrefiches principales, quand la charge agit à l'extrémité des poutres, est égale à $8640 \times \frac{500}{200}$ . . . . = 21600 kilg.
(en ne tenant pas compte de l'influence des contrefiches auxiliaires).
La pression sur chacune des contrefiches principales est, par suite, égale à $\frac{1}{2}\,21600$ . . . = 10800 „

Pour déterminer la section d'une semblable pièce, nous admettrons qu'elle commencerait à fléchir sous une charge, simplement dix fois supérieure à celle qu'elle a à supporter réellement et alors, dans la formule:

$$P = \frac{\varepsilon}{12} \pi^2 \frac{b h^3}{l^2}$$

nous poserons:

$$P = 10 \times 10800 = 108000$$
$$\pi = 3{\cdot}142$$
$$\varepsilon = 120000 \text{ (coefficient d'élasticité du chêne)}$$
$$l = 500$$
$$b = 2 h$$

ce qui conduit aux valeurs suivantes:

$$h = \sqrt[4]{\frac{12 P l^2}{2 \varepsilon \pi^2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . = 19 \text{ centm.}$$
$$b = 2 h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = 38 \;\; "$$

Chèvres.

Pour les charges à élever dans une direction verticale, on fait souvent usage d'appareils simples, qu'on nomme chèvres. Les plus employés sont les suivants.

Chèvre à trois pieds.

Fig. 3, pl. XLIII. Cette disposition s'emploie de préférence pour les creusements de puits et constitue ordinairement une installation provisoire. Elle comprend trois pièces de bois, terminées, à la partie inférieure, par des pointes en fer; elles sont disposées en pyramide et sont réunies, à la partie supérieure, par une pièce métallique; au sommet de cette pyramide est suspendue une poulie, tandis qu'à la partie inférieure se trouve un treuil à bras en croix ou à manivelle. La corde, à laquelle se suspend la charge à soulever, passe sur la poulie et vient s'enrouler sur le tambour du treuil, auquel elle est fixée par une de ses extrémités.

Chèvre à quatre pieds.

Fig. 4, pl. XLIII. Cet appareil se compose de quatre montants en bois, disposés en pyramide, terminés, comme précédem-

ment, par des pointes en fer et assemblés, à la partie supérieure, dans une pièce en fonte. A cette dernière pièce se trouve suspendu un moufle, dont la corde vient s'enrouler sur le tambour d'un treuil à engrenages, dont le bâti se trouve formé par deux des pièces inclinées.

La chèvre à quatre pieds est très employée dans les ateliers d'expédition, pour opérer le chargement des chariots de transport. Pour cela, on commence par amener la charge sur le sol, au milieu de la pyramide, puis, au moyen du moufle et du treuil, on l'élève à une hauteur suffisante pour que la voiture puisse passer au-dessous; il suffit alors de dérouler la corde d'une certaine quantité, pour que la charge vienne se mettre à la place qu'elle doit occuper sur le chariot.

Chèvre à deux pieds ou machine à mâts.

Fig. 5 et 6, pl. XLIII. C'est l'appareil qu'on emploie de préférence pour l'établissement des mâts et l'armement des navires à voiles et à vapeur. Ses dimensions sont très considérables et il doit être disposé et dirigé avec le plus grand soin.

Il comprend deux grandes pièces ou mâts a, réunis, à leur partie supérieure, par une traverse et maintenus par des chaines b munies d'ancres, engagées dans un sol convenablement préparé. Ces pièces a sont ordinairement formées de tubes en tôle. A leur extrémité inférieure, elles se terminent par des parties arrondies qui reposent dans des crapaudines en fonte, encastrées dans le mur de quai; de chaque côté se trouvent des contrefiches auxiliaires en bois c. A la traverse supérieure sont suspendus deux moufles très-puissants. Les extrémités libres des cordes ou des chaines de ces moufles, en quittant les poulies des chapes supérieures, viennent passer sur les poulies guides d d et vont ensuite s'enrouler sur deux cabestans e, établis de manière à laisser entre eux une voie assez large, pour permettre d'amener les charges jusqu'au point h du bord de quai, entre les deux mâts.

En arrière de ces deux cabestans, et au milieu de la voie, se trouve un troisième treuil g, qui n'est pas représenté sur la figure et dont nous verrons la destination. Lorsqu'on veut placer sur un bateau une certaine charge, par exemple une chaudière à vapeur, on commence d'abord par l'amener sur le bord h du mur de quai; puis on abaisse entièrement les chapes inférieures

des moufles, en les amenant près des pièces a; on suspend la chaudière à ces chapes, au moyen de chaines, et on la relie, par une corde horizontale, au treuil g, établi au milieu de la voie. Ces opérations préliminaires terminées, les cabestans e sont mis en mouvement, de manière à rapprocher les chapes inférieures des chapes supérieures, en même temps qu'on agit sur le treuil g, pour dérouler la corde, tout en lui laissant une certaine tension. Au bout de quelque temps, la chaudière se trouvant arrivée à une certaine hauteur, on suspend l'action des cabestans e et on fait mouvoir le treuil g, de manière à amener la chaudière verticalement au-dessous de la traverse supérieure. A ce moment on arrête le treuil g et on remet en marche les cabestans e, pour faire descendre la chaudière et l'amener à la place qu'elle doit occuper sur le navire.

Désignons par l la longueur d'un des mâts, α et β les angles que sa direction forme avec la chaine b et la verticale, Q le poids de la charge à soulever, q les poids des deux mâts, S la somme des tensions dans les deux chaines b, S_1 la somme des pressions dans les deux mâts; en supposant que le centre de gravité de chaque mât tombe au milieu de sa longueur, nous aurons les relations suivantes:

$$S\, l \sin \alpha = Q\, l \sin \beta + q \frac{1}{2} \sin \beta.$$

$$S_1 = S \cos \alpha + Q \cos \beta.$$

Ou:

$$\left.\begin{aligned} S &= \left(Q + \frac{1}{2}\, q\right) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \\ S_1 &= \left(Q + \frac{1}{2}\, q\right) \sin \beta \operatorname{cotg.} \alpha + Q \cos \beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

De ces expressions on conclut que les tensions et les pressions sont faibles, lorsque la valeur de β est faible et celle de α, au contraire, considérable. Il y a donc avantage à donner aux mâts une longueur très grande, relativement à la portée, et à établir l'ancrage des chaines à une grande distance du bord du quai.

Nous allons donner un exemple du calcul des dimensions des différentes pièces d'un appareil, avec les hypothèses suivantes:

Diamètre de la corde	5 centim.
Tension correspondante dans un brin m d . . .	2000 kilg.

Nombre des poulies d'une chape 4
Coefficient de rendement d'un moufle . . . . 0·66
La charge Q, qui peut être soulevée par les deux moufles, lorsque la corde a une tension de 2000 kilg., est $Q = 2 \times 2000 \times 8 \times 0{\cdot}66$. = 21120 kilg.
La charge, pour un seul moufle, $\frac{1}{2}Q$ . . . . = 10560 „
Le diamètre de l'axe d'une poulie d'un des moufles est égal à $0{\cdot}12\sqrt{\frac{1}{2}\,10560}$ . . . . = 8·6 centm.

Maintenant, d'après ce que nous avons vu au chapitre des moufles (page 422), on a:

$$\frac{k^{2n}-1}{2\,n\,k^{2n}\,(k-1)} = 0{\cdot}66.$$

Comme ici $n = 4$, on tire de là . . . . $k = 1{\cdot}1$

Par suite, on a:

$$k = 1{\cdot}1 = 1 + 0{\cdot}26\,\frac{\delta^2}{D} + 2f\,\frac{d}{D},$$

formule dans laquelle on doit faire:

$$\delta = 5,\ d = 8{\cdot}6,\ f = 0{\cdot}1.$$

On trouve alors, pour le diamètre d'une poulie, $D = 82$ centm.

Pour le calcul des pièces du bâti de l'appareil, admettons les données suivantes:

Portée de l'appareil . . . . 400 „
Hauteur . . . . 1000 „
Distance i n . . . . = 1000 „
Longueur des mâts . . . . 1070 „
Angles . . . . { α = 22° ; β = 33°
Poids approximatif d'un mât (en le supposant en tôle) . . . . 1010 kilg
Diamètre d'un mât . . . . 40 centm.
D'après les équations (1), les tensions des deux chaines ont pour valeur: $S = (21120 + 1010)\,\frac{0{\cdot}375}{0{\cdot}545}$ . . . . = 15227 kilg
La tension d'une seule chaine $\frac{1}{2}S$ . . . . = 7668 „

En admettant, pour la tension par centimètre carré,

$\frac{1}{10}$ de la charge de rupture, $\frac{3300}{10}$ . . . . . $= 330$ kilg.

La section du fil de la chaine sera $\frac{7618}{330}$ . . . $= 25$ centmq.

Pression exercée sur un mât:

$$\frac{S_t}{2} = \frac{1}{2}(15227 \times 0{\cdot}839 + 21120 \times 9{\cdot}027) \;.\;. = 16176 \text{ kilg.}$$

Pour calculer l'épaisseur à donner à la tôle des tubes, qui forment les mâts, nous nous servirons de la formule

$$P = \frac{\varepsilon}{64}\,\pi^3\,\frac{d^4 - d_1^4}{l^2},$$

d'où on déduit:

$$d_1 = \sqrt[4]{d^4 - \frac{64\,P\,l^2}{\varepsilon\,\pi^3}},$$

formule dans laquelle on doit faire:

$l = 1070$, $d = 40$, $\varepsilon = 2000000$, $\pi^3 = (3{\cdot}14)^3 = 31$, $P = 10 \times 16176$.

On trouve alors:

Diamètre intérieur des tubes d_1 . . . . $= 39$ centm.

Epaisseur de la tôle des tubes $\frac{40 - 39}{2}$ . . . . . $= 0{\cdot}5$ „

Pour déterminer les dimensions de la traverse supérieure, à laquelle sont suspendus les moufles, supposons que sa longueur soit . . . . . . $= 150$ „

La pression sur un tourillon de cette traverse sera $\frac{1}{2}$ 21120 . . . . $= 10560$ kilg.

Le diamètre de ce tourillon . . . . $= 12$ centm.

La section de cette traverse { Hauteur . . . . $= 29{\cdot}3$ „
Largeur . . . . $= 9{\cdot}4$ „

Appareils d'érection.

Fig. 7, pl. XLIII. Lorsqu'il s'agit de mettre en place des pièces d'une très grande longueur, telles que des cheminées en tôle, des mâts, des obélisques, on a généralement recours à un appareil qui convient parfaitement à cet usage et que nous allons décrire, tel qu'il a été employé à Paris, pour l'érection de l'obélisque de Luxor.

a est le piédestal, sur lequel l'obélisque doit être placé, c une construction provisoire, qui s'étend jusqu'au piédestal, et sur laquelle doit reposer l'obélisque avant son érection, en le supposant disposé de telle manière que le côté d de sa base touche précisément la surface supérieure du piédestal, suivant la ligne qu'il doit occuper définitivement, après la mise en place. La base de l'obélisque est garnie d'une armature, qui porte deux tourillons, en saillie sur les faces, et dont les axes géométriques coïncident avec la direction de l'arête d. Ces tourillons reposent dans des coussinets fixés sur le piédestal. Grâce à cette disposition, l'obélisque ne peut recevoir d'autre mouvement qu'une rotation autour de son arête d. e est la projection de deux mâts, assez éloignés l'un de l'autre à la partie inférieure, mais qui vont en se rapprochant et se relient à la partie supérieure en g; ils peuvent d'ailleurs tourner autour d'axes situés en *f*; g h est une chaine, fixée, en h, à la pointe de l'obélisque et, en g, aux mâts; g i est une autre chaine, qui part également du point g, pour venir s'enrouler sur le tambour d'un treuil i (il est évident d'ailleurs qu'on peut employer un plus grand nombre de chaines et de treuils, disposés comme ceux que nous venons d'indiquer); h k est une troisième chaine, dont une extrémité est fixée à la pointe de l'obélisque, tandis que l'autre s'enroule sur le tambour du treuil k. La longueur de cette chaine doit être un peu plus grande que la distance du point k au sommet de l'obélisque, supposé mis en place. Il est évident, d'après cette description, que, pour arriver au résultat cherché, il suffit d'agir sur le treuil i, de manière à produire l'enroulement de la chaine g i, en même temps qu'on manœuvre le treuil k, afin de conserver constamment à la chaine k h un certain degré de tension. Par suite de l'action des treuils, les mâts se redressent, en tournant autour des articulations *f*, et l'obélisque se soulève à sa pointe, sous l'action de la chaine g h, en même temps qu'il tourne autour des tourillons établis à sa base, en d. Lorsque l'opération est arrivée à ce point, que la verticale du centre de gravité de l'obélisque passe par l'arête d, il convient de donner à la chaine k h une forte tension, car, à partir de ce moment, il suffit d'un faible mouvement du treuil i, pour que toute tension disparaisse dans la chaine g i et l'obélisque ne se trouve plus retenu que par la tension de la chaine k h. On agit ensuite avec beaucoup de prudence sur le treuil, de manière à ce que cette dernière chaine

se détache lentement du tambour, jusqu'à ce que l'obélisque ait atteint la position qu'il doit occuper définitivement.

Sur les navires à vapeur, c'est à une disposition analogue qu'on a recours pour renverser les cheminées qui, lorsqu'elles doivent satisfaire à cette condition de déplacement, sont munies d'une charnière à leur partie inférieure.

Plateformes roulantes.

On désigne, sous ce nom, des chariots d'une faible hauteur, à quatre ou à six roues, dont le tablier porte des rails et qui sont destinés à faciliter le déplacement des divers véhicules de chemins de fer, à l'intérieur des gares.

Plateformes de faibles dimensions.

Fig. 8, pl. XLIII. A est une remise de voitures, munie d'une voie ferrée B B; pour faire passer ces voitures de la voie B B sur la voie parallèle D D, on a recours à une plateforme, mobile sur la voie C C, perpendiculaire aux deux autres. Les fig. 9 et 10, pl. XLIII représentent cette plateforme.

B et D sont des voies ordinaires; C est une voie, destinée à les relier et qui comprend trois traverses longitudinales, sur lesquelles sont boulonnées des bandes de fer. La plateforme se compose d'un chassis, formé de deux longues bandes de tôle a a et de six autres plus courtes b b, consolidées par des tirants en croix c c. Entre chacune des séries de deux bandes b b, se trouvent établies quatre roues d d_1, dont les coussinets sont boulonnés sur ces bandes elles mêmes et qui peuvent rouler sur les traverses C C C. Sur les bandes de tôle a a, à leur partie inférieure, se trouvent fixées extérieurement d'autres tôles recourbées e e, qui forment des rails, destinés à recevoir la voiture à transporter. f f_1 représentent quatre pièces, mobiles autour d'axes verticaux. Pour amener un wagon de la remise sur la voie, on opère de la manière suivante: on commence par faire rouler la plateforme sur les traverses C C C, jusqu'à ce que les rails e e se trouvent dans le prolongement de ceux de la voie B B; on fait ensuite tourner les pièces f f_1 autour de leurs axes, de manière à les amener également dans la même direction. Dans cette position, les surfaces supérieures de ces pièces forment des

plans inclinés, qui rachètent la légère différence de niveau existant entre les surfaces supérieures des rails B B et e e. On peut alors amener le wagon de la voie B B sur les rails e e de la plateforme, puis on fait rouler cette dernière sur les traverses C C C, jusqu'à ce que les rails e e arrivent en regard de ceux de la voie D D, et on fait tourner les pièces *f f* ou f_1 f_1 autour de leurs axes, de manière à les amener dans la direction de la voie D D ou D_1 D_1; il ne reste plus alors qu'à faire glisser le wagon sur les petits plans inclinés, ainsi obtenus, pour l'amener sur la voie D D, ou son prolongement D_1 D_1.

Plateforme avec fosse.

Fig. 1 et 2, pl. XLIV. A est une remise de wagons, B B_1 une voie ferrée, C D E F une fosse, munie de parois en maçonnerie et dont le fond forme une voie ferrée, composée de deux ou de trois rails G G_1; a_1, a_2 . . . sont des portions de voies, qui aboutissent de l'intérieur de la remise au bord D F de la fosse. Sur les rails de cette fosse, se meut une plateforme, qu'on peut amener en regard d'une quelconque des petites voies parallèles à B B_1. Les parties supérieures des rails de B B_1, a_1 a_2 . . . et de ceux de la plateforme sont à la même hauteur. Lorsque la plateforme est en H, ses rails sont dans le prolongement de ceux de B et de B_1, il est donc possible, dans ce cas, de la charger facilement d'un wagon, venant d'une de ces voies. En amenant la plateforme dans la fosse jusqu'en H_1, ses rails forment le prolongement de ceux de la voie a_3 et permettent, par suite, d'amener le wagon dans la remise. La plateforme, représentée fig. 1 et 2, est simplement destinée au transport de wagons non chargés. Elle est munie d'un petit treuil, sur lequel agissent deux ouvriers, qui suffisent pour la mettre en mouvement.

Plateforme pour remises de locomotives.

Fig. 3, pl. XLIV. A et A_1 représentent deux remises de locomotives; B, B_1 deux voies, qui aboutissent aux bords de la fosse C D E F; J_1 J_2 J_3 J_4, des rails établis sur le sol de cette fosse; G, H la plateforme munie d'une voie parallèle à B B_1; a_1 a_2 . . . b_1 b_2 . . . une série de petites voies, qui vont, des bords C D et F E de la fosse, aux remises A et A_1. La plateforme étant amenée en G, la voie, dont elle est munie, se trouve dans

le prolongement des voies BB_1 et elle peut, dès lors, recevoir une locomotive venant de l'une ou de l'autre de ces voies; la plateforme, ainsi chargée, étant conduite en H, dans l'alignement des voies $a_2 b_2$, la locomotive peut être dirigée à volonté sur l'une ou l'autre des deux remises. Les fig. 4 et 5, pl. XLIV indiquent la disposition générale de la plateforme.

A B C D est un chassis, formé de bandes de tôle verticales, consolidées par un certain nombre de traverses, P Q R une partie additionnelle, supportée par les traverses E F, H G, J K, L M et qui est munie d'un treuil à engrenages; a_1 a_2 a_3 a_4 sont des galets guides, mobiles sur les rails J_1 J_4, établis sur le sol de la fosse, b_1 b_2 b_3 b_4 des roues motrices, mobiles sur les rails J_2 J_3. Les roues b_1 et b_2, b_3 et b_4 sont respectivement fixées, deux à deux, sur les arbres c et c_1, qui sont munis de roues dentées, engrenant avec deux vis sans fin e e_1, calées sur l'arbre d, qui est mis en mouvement par les manivelles du treuil, au moyen d'un double engrenage conique.

Proposons-nous de déterminer les règles à suivre pour la construction d'une plateforme de cette espèce, qui doit servir, par exemple, à transporter une locomotive et son tender.

Admettons, dans ce cas, les données suivantes:

Longueur de la plateforme A C	= 10 mètres
Largeur „ „ „ A B	= 1·65 „
Hauteur du chassis, y compris la saillie des rails,	= 0·50 „
Poids de la locomotive remplie d'eau	= 27·000 kilg.
Pression sur l'axe le plus chargé	= 10 000 „
Poids du tender, avec sa charge d'eau et de charbon, ...	= 17·000 „

Pour déterminer, aussi exactement que possible, les dimensions à donner aux bandes de tôle, nous devrions considérer chacune d'elles comme une pièce à quatre appuis, chargée en différents points; mais nous serions ainsi conduits à des calculs très laborieux; nous nous contenterons donc d'une approximation et nous admettrons que: 1°, chaque bande se compose de trois pièces simplement appuyées à leurs extrémités et ayant chacune, pour longueur, $\frac{1}{3}$ $1000 = 333$ centimètres; 2°, pour chacune de ces pièces, le maximum du danger de rupture correspond au cas où l'axe de la locomotive, le plus chargé, se trouve précisément au milieu; 3°, le poids de la plateforme elle-même peut être négligé; 4°, les dimensions des bandes doivent être déterminées

de manière à ce qu'en aucun point la charge ne dépasse le dixième de celle qui produirait la rupture.

Désignons par :

$2\,l = \frac{1}{3}\,1000 = 333$ centm. le tiers de la longueur totale;

$l = \frac{1}{2}\,333 = 166$ centm.

$2\,P = \frac{1}{2} \times 10000 = 5000$ la pression exercée, au milieu de la longueur $2\,l$, par l'axe de la locomotive le plus chargé.

h la hauteur d'une bande $= 50^{cm}$, b son épaisseur.

$\sigma = \frac{4000}{10} = 400$ la tension, par centimètre carré, qui doit se produire sous l'action de la charge.

En considérant la section de la bande comme un rectangle, on a :

$$P\,l = \frac{\sigma}{6}\,b\,h^2$$

d'où on tire:

$$b = \frac{6}{\sigma}\,\frac{P\,l}{h^2} = \frac{6 \times 2500 \times 166}{400 \times 2500} = 2{\cdot}49 \text{ centm}$$

Le maximum de pression sur un des quatre tourillons des roues $a_1\,a_2$ est $\frac{1}{4}\,10000 = 2500$ kilg. Les tourillons ont, en réalité, à supporter cette pression, lorsqu'ils se trouvent directement au dessous de l'axe le plus-chargé; on a, par suite:

Diamètre d'un tourillon $0{\cdot}12\sqrt{2500}$ . . . . . . $= 6$ centm.

Diamètre d'une roue 10×6 . . . . $= 60$ „

Diamètre d'un tourillon d'une roue motrice $= 0{\cdot}12\sqrt{5000}$ . . . . $= 8{\cdot}5$ „

Avec les dimensions données et celles qui résultent des calculs précédents, on peut déterminer approximativement le poids de la plateforme; on trouve ainsi:

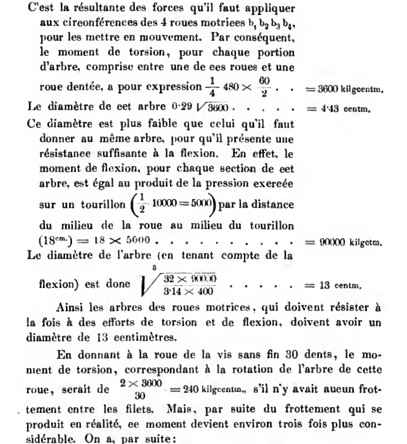
Poids approximatif de la plateforme. . . . . . $= 4000$ kilg.

Le frottement des tourillons des arbres des roues peut se déduire du poids de la locomotive, du tender et de la plateforme:

Ce poids total est égal à $27000 + 17000 + 4000$ $= 48000$ „

Le coefficient de frottement . . . . $= 0{\cdot}1$

L'effort nécessaire pour mouvoir la plateforme chargée est, par conséquent, $48000 \times 0{\cdot}1 \times \frac{6}{60}$ $= 480$ kilg



C'est la résultante des forces qu'il faut appliquer aux circonférences des 4 roues motrices $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$, pour les mettre en mouvement. Par conséquent, le moment de torsion, pour chaque portion d'arbre, comprise entre une de ces roues et une roue dentée, a pour expression $\frac{1}{4}\ 480 \times \frac{60}{2}$ . . $= 3600$ kilgcentm.

Le diamètre de cet arbre $0{\cdot}29 \sqrt{3600}$ . . . . . $= 4{\cdot}43$ centm.

Ce diamètre est plus faible que celui qu'il faut donner au même arbre, pour qu'il présente une résistance suffisante à la flexion. En effet, le moment de flexion, pour chaque section de cet arbre, est égal au produit de la pression exercée sur un tourillon $\left(\frac{1}{2}\ 10000 = 5000\right)$ par la distance du milieu de la roue au milieu du tourillon $(18^{cm.}) = 18 \times 5000$ . . . . $= 90000$ kilgctm.

Le diamètre de l'arbre (en tenant compte de la flexion) est donc $\sqrt[3]{\frac{32 \times 90000}{3{\cdot}14 \times 400}}$ . . . . . $= 13$ centm.

Ainsi les arbres des roues motrices, qui doivent résister à la fois à des efforts de torsion et de flexion, doivent avoir un diamètre de 13 centimètres.

En donnant à la roue de la vis sans fin 30 dents, le moment de torsion, correspondant à la rotation de l'arbre de cette roue, serait de $\frac{2 \times 3600}{30} = 240$ kilgcentm., s'il n'y avait aucun frottement entre les filets. Mais, par suite du frottement qui se produit en réalité, ce moment devient environ trois fois plus considérable. On a, par suite:

Le moment de torsion pour l'arbre d'une vis égal à 3×240 . . . . $= 720$ kilgcentm.

En supposant les 4 roues coniques d'égale grandeur et le rayon des manivelles de $39^{cm.}$, l'effort qu'il convient d'exercer sur ces manivelles, pour produire le mouvement de la plateforme, est égal à $\frac{720}{39}$ . . . . $= 18$ kilg.

et cet effort peut être facilement exercé par deux ouvriers.

Grues roulantes.

Une grue roulante est un appareil qui permet de transporter une charge, d'un point A, pris à volonté, à autre point quelconque B, à la seule condition que ces deux points A et B se trouvent compris dans l'intérieur d'un parallélipipède déterminé. On voit, d'après cela, qu'une grue roulante est, en quelque sorte, la réalisation mécanique d'un système de coordonnées rectangulaires. Soient O un angle de parallèlipipède, O X et O Y deux arêtes perpendiculaires, situées dans un plan horizontal et O Z la hauteur. Etablissons une voie ferrée, parallèle à O X, sur laquelle peut se mouvoir une plateforme, munie elle-même d'une voie parallèle à O Y; sur cette dernière voie plaçons un chariot, pourvu d'un treuil, destiné à élever et à descendre les charges; nous aurons ainsi constitué ce qu'on nomme une grue roulante.

Grue roulante pour atelier de montage.

Fig. 6, pl. XLIV. Cette figure représente une grue roulante en fer pour atelier de montage. a a est une plateforme, munie de 4 roues mobiles sur les rails b b, établis à une hauteur convenable au-dessus du sol, sur des retraites de la maçonnerie des murs du bâtiment; c est un chariot à roues, muni d'un treuil, et qui peut se mouvoir sur toute la longueur de la voie ferrée établie sur la plateforme. A ce chariot est suspendu, au moyen d'une traverse, un moufle d. La chaine ou la corde de ce moufle vient s'enrouler sur le tambour du treuil. Le mouvement de la plateforme s'obtient au moyen d'un second treuil, dont l'action se transmet, par une série d'engrenages coniques, à deux des 4 roues qui se meuvent sur les rails, établis sur les murs. Quant au mouvement du chariot, il s'obtient sans dispositif spécial; les ouvriers agissent directement sur lui par traction.

Cette disposition de grue roulante offre le grand avantage de laisser complétement libre toute l'étendue de l'atelier. Lorsque la largeur du bâtiment (distance b b) est considérable, on est naturellement conduit à donner de très fortes dimensions à la plateforme, pour qu'elle puisse porter des charges de 15000 à 20000 kilogrammes, sans compter son propre poids.

Grue roulante pour magasin.

Fig. 7 et 8, pl. XLIV. Dans cette grue la voie ferrée principale $a\ a_1$ repose sur le sol du bâtiment. La charpente se com-





